# 変換群入門

S.ドゥージン／B.チェボタレフスキー 著
雪田修一 日本語版監修
名倉真紀 訳




Springer
シュプリンガー・フェアラーク東京

# 変換群入門

著…S.ドゥージン／B.チェボタレフスキー
日本語版監修…雪田修一
訳…名倉真紀

Springer
シュプリンガー・フェアラーク東京

This Japanese translation is based on the English original:
Sergei Duzhin and Boris Chebotarevsky
Transformation Groups in Algebra, Geometry and Calculus

# まえがき

本書の原型は，B. チェボタレフスキーと私が 1983 年から 1986 年の間に執筆して 1988 年に Vysheishaya Shkola 社 (Minsk) からロシア語で出版した書籍 "From Symmetries to Differential Equations" にあります．本書に登場する手書きのさし絵は，そのロシア語版のために Vladimir Tsesler が描いてくれたものです．

その後数年たつうちに，我々のロシア語版について有名無名の方々から賛辞のお言葉をいただき，私は 1996 年にロシア語版を英訳することを決心しました．英訳する際には，元のロシア語版をいっそう首尾一貫した，セルフ・コンテインドな内容にするために努力しました．あまり重要でない部分は削除し，新しい節をいくつも加えました．そしてまた，多くの誤りを修正しました（新たな誤りを生産していなければよいのですが）．

本書は，数学の様々な分野から例をひいて変換群の概念を紹介することを目的として，高校生や大学 1 年生を念頭において書きました．とくに，ソフス・リーの方法 —— 微分方程式を，対称性を表す連続群を使って，求積法によって解く方法 —— を初等的に解説した点は，最近の教科書にはない特長だと思います．

本書はヒントや解答のついた練習問題をたくさん含んでいます．きちんと解けば自然に各題材が身につくでしょう．

2000 年 10 月 30 日ペレスラフ・ザレスキーにて　　　　S. ドゥージン

# ドゥージン先生の変換群入門について

ドゥージン先生と先に書きましたが，実は私にとっては先生ではなくお友達です．会津の地で何年か一緒に数学やピクニックやウォッカを楽しみました．以下ではドゥージンさんと書きましょう．

ドゥージンさんの講義はいつも具体例から始まります．例を通じて，何を問題にしているのか，なぜそれを問題にしているのか，聴衆を十分に納得させてから，厳密な定式化へと進みます．

この本は，通常の群論の入門書とはかなり異なる構成をとっています．有限生成アーベルの基本定理とかシローの定理とか，普通の数学科の教科書に取り上げられる項目は敢えて取り上げていません．その代わりに，「点の代数」から始まって，平面運動，変換群と進む叙述の中で，幾何学と代数学の共通のキーワードである不変量，不変性について，自然にそれらが読者の問題意識にのぼるようにストーリーが仕組まれています．そのようにして，前半で群論の基礎概念が身につくようになっています．後半は，変換群の軌道に関するバーンサイドの定理をネックレスのビーズの組合せの数え上げに応用してみせたり，結晶の対称性を分類したりして，群論が直接の応用をいろいろ持っていることを紹介しています．最後に，接触幾何と微分方程式，群論のつながりが紹介されています．このあたりの微分方程式の古典的な解法理論は，その面白さにもかかわらず，数学科でもあまり学ぶ機会が無いのではないかと思います．

この本は，幅広い読者層にとってすばらしいプレゼントとなるでしょう．少

し背伸びをしてみたい高校生には，何とか手の届く大学の数学を体験させてくれます．抽象的な数学に押しつぶされそうになっている大学生にとっては，この本で紹介されている「具体的な数学」は新鮮な驚き，感動を引き起きおこすものとなるでしょう．数学愛好家のみなさんには，すばらしい研究の手引書として活用していただけると期待しています．さあ，ノートを広げ鉛筆を持って始めましょう．

2000 年 10 月　　法政大学　雪田修一

# 目　　次

# 序　　章

数学史上一番有名な本は，おそらく『ユークリッド原論』であろう．ヨーロッパにおいて『ユークリッド原論』はおよそ2000年もの間，すべての学校の標準的な幾何学の教科書として使われた．

その本の初めのほうに，次の定理1がある．ここではその前半のみ引用する．

**定理 1 (ユークリッド)** 二等辺三角形の両底角は等しい．

現在，よく知られた証明は大変短い．

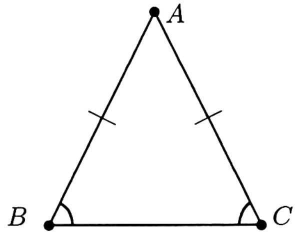



図1　二等辺三角形

**模範的な証明[1]：** $ABC$ を与えられた二等辺三角形とする (図 1)．$AB = AC$ であるから，$A, B, C$ をそれぞれ $A, C, B$ にうつす平面運動が存在する (対

[1] ［訳注］この証明は，英語版を翻訳したものであるが，日本において，この証明はあまり知られていない．日本の教科書にみられる証明は次の通りである．点 $A$ から辺 $BC$ に垂線 $AD$ を下ろすと，$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ となる．ゆえに $\angle ABC = \angle ACB$.

称変換)．この運動によって，$\angle ABC$ は $\angle ACB$ にうつる．よって，この 2 つの底角は等しい． □

この定理について面白いことは何もないように思われる．がしかし，少し待ってほしい．ユークリッド独自の証明を見てみよう (図 2).

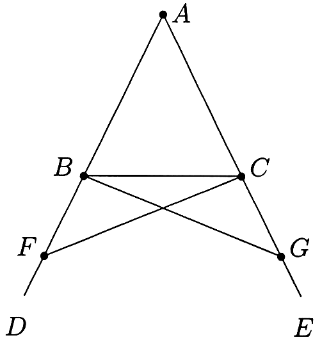



図 2　ユークリッドの証明

**ユークリッドの証明：**辺 $AB$, $AC$ のそれぞれの延長線 $AD$, $AE$ 上に $AF = AG$ となる 2 点 $F, G$ をとる．このとき，$\triangle ABG \equiv \triangle ACF$ より，$\angle ABG = \angle ACF$．また，$\triangle CBG \equiv \triangle BCF$ より，$\angle CBG = \angle BCF$ となる．ゆえに，$\angle ABC = \angle ABG - \angle CBG = \angle ACF - \angle BCF = \angle ACB$. □

中世のイギリスにおいて，定理 1 は，"*pons asinorum*"(ろばの橋) という名前で知られていた．事実，図 2 の 4 点 $F$, $B$, $C$, $G$ とそれらを結ぶ線分で形成される図形は橋に似ている．ユークリッドの証明を習得できなかったできの悪い生徒は，この橋を越えられなかったろばにたとえられた．

現代的な視点からみるとユークリッドの論理はめんどうで奇妙にみえる．いったいどうしてユークリッドは，このような補助の三角形 $ABG$, $ACF$ が必要だったのだろうか？ 「数学的な対象は運動と無関係である」とした彼の哲学によって運動を用いることは禁じられていたのである．

このように，運動によって幾何学的な事実を説明することができ，その証明も簡単にできるのである．しかしながら，運動を 1 つ 1 つ研究することばかりが重要なのではない．面白いのは運動どうしのふるまい，すなわち，運

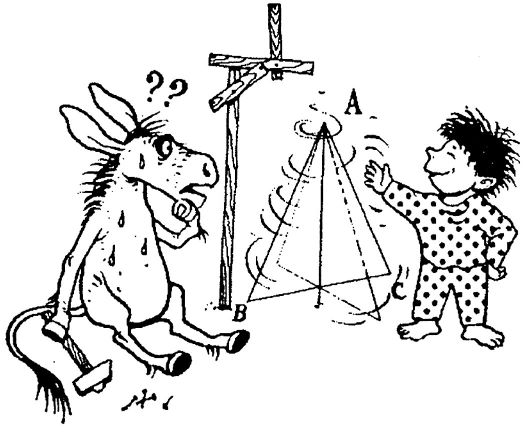



図 3　ろばの橋

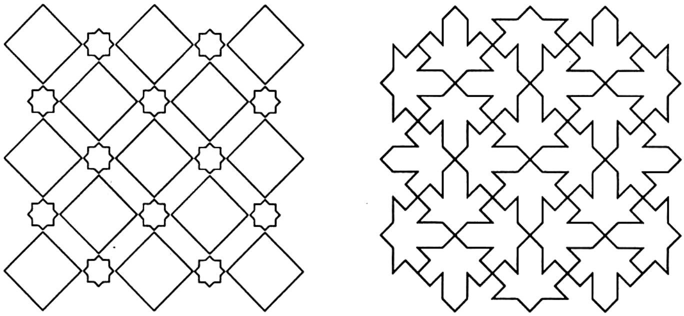
動どうし相互に関係づけられた**運動の集合**(もっと一般に**変換の集合**) の構造にある．このとき，一番重要な概念は**変換群**である．

数学的な理論としての群論は，19 世紀に世に出たばかりである．しかしながら, 変換群に直接関係のある具体的な例は，古代文明時代すでに，東洋においても西洋においても創られていた．これは，20 世紀の名高い数学者ヘルマン・ワイルが，模様美術を「潜在的な形で表現された高等数学の最も古い顔」と呼んだ所以である．

図 4 は，中世に描かれたスペインにおけるアルハンブラ宮殿の壁模様である．このような模様を敷き詰め模様という．

どちらの模様も, 多くの平面変換で変わらないという意味で，非常に対称的である．事実図 4 a の対称的な性質は，図 4 b の性質に非常に近い．すなわち，どちらの模様も無限個の平行移動や 90°, 180° 回転，対称変換，そして映進 (§2.6 参照) によって変化しない．しかし，これらは同じものではない．この 2 つの模様の違いは，これらの運動がおのおのの模様に対してどのように関係づけられているかにある．この言葉の正確な意味は，図 4a と図 4b の対称群が同型でないという群論の言葉でしか説明できないのである (p.151 参照).

敷き詰め模様の対称群のありうるすべての型を決定し，分類するという問題は，19 世紀後半，ロシアの科学者 E.S. フェドロフ とドイツの科学者



*a*　　　　*b*

図 4　アルハンブラ宮殿の壁模様

A. M. シェーンフリース によって，まったく別々に解かれた．そして，ちょうど 17 種類の平面結晶群があることがわかったのである (p.149 の表参照).

もちろん，群論は単なる平面模様の分類だけにとどまらず，その他のいろいろな問題解決に大いに役立つ．事実，群論は，代数学，幾何学，位相数学，微分積分学，力学などで広く用いられていて，数学全般における重要な概念の 1 つである．

本書は群論の入門書である．まずユークリッド幾何学からいくつかの例を挙げる．そこでは平面運動が重要な役割を果たし，それによって群論のアイデアが自然にわいてくる．それから，変換群，そしてもっと一般の抽象群を導入し，群論の代数的な側面や整数論における応用について議論する．その後，群の作用，軌道，不変量，いくつかの分類問題にうつり，最後に，連続的な群を用いた微分方程式の解法を議論する．本書の主なねらいは，群の概念が数学の異なる分野でどのように活躍しているかを示すことであり，つまりは数学が統一された科学であることを論証することである．

本書は，初等的な代数学，幾何学，微分積分学などのような高等学校の数学教育を終えた読者を対象に書かれている．

詳細な解答がある問題や，巻末にヒントや答えがある練習問題が豊富にちりばめられているので，読者には積極的に多くの問題を解いて本書を深く理解してもらいたい．

# 第1章
# 点の代数

この章では，平面上の点集合に代数的な演算 —— 和と積 —— を導入する．この演算によって，幾何学を代数学に，また逆に代数学を幾何学に対応付けることができる．

## §1.1　格子模様の平面

正方格子，すなわち，平行な等間隔の直線の集合で互いに垂直な 2 つの集合を考えよう．図 1.1 に示される二等辺三角形や正方形のように，格子点上にそのすべての頂点がある多角形がどのようなものかを調べてみよう．

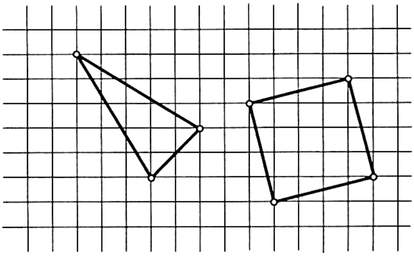


図 1.1　格子平面上の多角形

**問題 1** 正方形以外の正多角形は，そのすべての頂点が格子点にのることが不可能であることを証明せよ．

**解答．** そのすべての頂点が格子点上にある正多角形 $A_1A_2\cdots A_n$ が仮にあったとする．$O$ をその中心とする任意の連続する頂点 $A_{k-1}A_k$

$A_{k+1}$ に対して，$A_{k-1}A_kA_{k+1}B_k$ が平行四辺形となるように格子点 $B_k$ を求める．図 1.2 全体は，$O$ の回りの $360/n^\circ$ 回転，または $OA_k$ に関する折り返しで自分自身に重なる．したがって，任意の点 $B_k$ は直線 $OA_k$ 上にあり，$B_1B_2\cdots B_k$ は正多角形となる．$n>6$ ならば，正多角形 $B_1B_2\cdots B_k$ は，正多角形 $A_1A_2\cdots A_n$ より小さいはずである．なぜならば，$\alpha=\frac{n-2}{n}\times 180^\circ>\beta=\frac{2}{n}\times 360^\circ$ より，$B_k$ が線分 $OA_k$ 上の点となるからである．重要なことは，$B_1$, $B_2,\ldots,B_n$ もまた，すべて格子点であるということである．

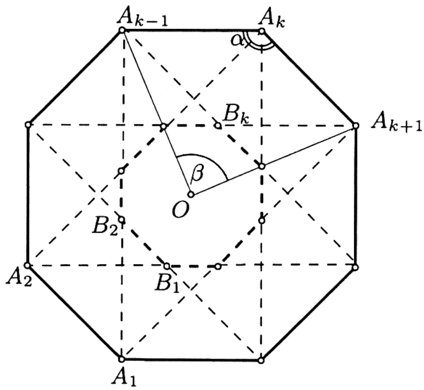



図 1.2　正多角形

同じ手続きを正多角形 $A_1A_2\cdots A_n$ の代わりに正多角形 $B_1B_2\cdots B_n$ に対して実行すると，以下の条件をみたす正多角形 $C_1C_2\cdots C_n$ が得られる：

- 頂点は格子点ばかりからなり，
- 頂点 $C_k$ は線分 $OA_k$ 上にあり，しかも点 $B_k$ よりも点 $O$ に近い．

線分 $OA_k$ 上には有限個の格子点しかないから，この手続きを何回か繰り返すうちに矛盾にたどりつく．

同じような議論は正五角形についてもできる．違いはと言えば，直線 $OA_k$ 上の点 $B_k$ が線分 $OA_k$ の外に出てしまうことである．

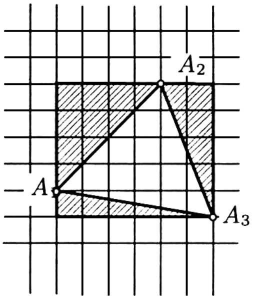



**図 1.3**　このような正多角形は存在するか？

$n = 3$，または $n = 6$ だと，先の議論はだめになる（なぜ？）．そこで，今度は違う方法で，$n = 3$，または $n = 6$ について証明しよう．まず，正六角形の 3 頂点を用いて，正三角形がつくれることに注意すれば，証明は $n = 3$ についてだけやれば十分であることがわかる．正三角形のすべての頂点が格子点上にあると仮定しよう（図 1.3）．ピタゴラスの定理より，この正三角形のどの辺の平方も整数となることがわかる（格子の一辺の長さを 1 とする）．したがって，面積 $S = a^2\sqrt{3}/4$ は無理数になる．ところが，図 1.3 のように，正三角形 $A_1A_2A_3$ は整数の長さの辺からなる長方形から，3 つの直角三角形を取り除いても得られる．したがって，面積は有理数にならなければならない —— 実際，その面積は $m$ を適当な整数として $m$ あるいは $m + \frac{1}{2}$ と表される．よって，これは矛盾である．

**練習 1.**　格子模様の平面上に，そのすべての辺が整数の長さをもち，格子直線に平行でない正三角形は存在するか．ただし，格子の一辺の長さを 1 とする．

## §1.2　点の和

問題 1 の解答は，正方格子のすばらしい性質に依存していた．すなわち，平行四辺形の 3 頂点が格子点上にあるならば，残りの 1 頂点も格子点上にあ

るという性質である．数学的な言い方をすれば，この現象は格子点の全体からなる集合は，いま我々が注目している演算に関して閉じているということになる．ではこれから，その演算の正確な定義をしよう．

平面上に3点 $M, N, P$ が与えられたとする．三角形 $MNP$ にもう1点付け加えて平行四辺形にするには3通りの方法がある．1つは，$P$ を $MN$ の中点 $K$ とむすび，直線 $PK$ 上に $K$ に関して $P$ と対称となる点 $L$ をとる方法である (図 1.4).

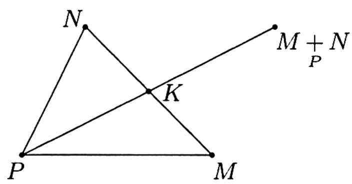



図 1.4　点の和

**定義 1**　このように構成された点 $L$ を $P$ を極とした点 $M$ と点 $N$ の和といい，$L = M \underset{P}{+} N$ と表す．この式を「$P$ 上 $M$ 足す $N$」と読むことにする．極を固定して考えているときは，単に $L = M + N$ と書く．

この定義は，平面上の任意の3点に対して適用できる．もし，$M, N, P$ が一直線上にあるならば，その平行四辺形はつぶれて線分になる．3点が一致していたらさらにつぶれて点になる．

ここで，問題1で用いられた正方格子の性質を表す事柄を述べよう．

**『任意の格子点を極とする任意の2つの格子点の和は格子点である．』**

さて，今度は格子模様は忘れて，点の和の性質を調べよう．

**練習 2.**　2つの三角形 $ABC, DEF$ と点 $P$ が与えられているとする．$\Phi$ をすべての点 $M \underset{P}{+} N$ の集合とするとき，次のことを調べよ．ただし，$M, N$ はそれぞれ $\triangle ABC, \triangle DEF$ の内点とする：

a) $\Phi$ は多角形であることを証明せよ．また，$\Phi$ の辺の本数を求めよ．

b) $\Phi$ の周の長さは，2つの三角形 $ABC, DEF$ の周の長さの和と等しいことを証明せよ．

点の和は，ベクトルの和と密接な関係がある．つまり，$L = M \underset{P}{+} N$ は $\overrightarrow{PL} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}$ と同値で, 次のようなベクトルの和の演算と類似した性質をもつ：

1° 結合法則

$$(A \underset{P}{+} B) \underset{P}{+} C = A \underset{P}{+} (B \underset{P}{+} C)$$

が任意の極 $P$ に関する任意の 3 点 $A, B, C$ に対して成り立つ．

2° 任意の極 $P$ に関する任意の点 $A$ に対して，次の等式が成り立つ．

$$P \underset{P}{+} A = A$$

すなわち，$P$ は演算 $\underset{P}{+}$ の単位元である．

3° 与えられた極 $P$ に関して，任意の点 $A$ は逆の点をもつ．すなわち，次の式をみたす点 $A'$ が存在する．

$$A \underset{P}{+} A' = P$$

実際，$P$ に関して，$A$ と対称な点 $A'$ をとればよい．

4° 交換法則

$$A \underset{P}{+} B = B \underset{P}{+} A$$

が任意の 2 点 $A, B$ に対して成り立つ．

これらの 4 項目は気ままに並べたのではない．基本的な法則ほど先に来るように順序をつけてある．第 3 章「変換群」まで読み進むと，そのことがよくわかるだろう．

法則 2°～4° は当たり前で，証明するまでもないだろう．法則 1 は，次のようにして確かめられる．まず，点 $M = A \underset{P}{+} B$ と点 $N = B \underset{P}{+} C$ を構成する (図 1.5 参照)．線分 $AM$ と線分 $CN$ はともに線分 $PB$ に平行で，長さが等しい．したがって，$MC$ と $AN$ の中点は一致する．和の定義より，このことは $M \underset{P}{+} C = A \underset{P}{+} N$ を示している．

法則 3° を用いると，与えられた極に関する 2 点の差を $B \underset{P}{-} A = B \underset{P}{+} A'$ と定義することができる．ここで，$A' = \underset{P}{-} A$ は $A$ の逆で点である．点 $B \underset{P}{-} A$ は方程式 $A \underset{P}{+} X = B$ のただひとつの解である．

極を固定してしまえば，和と差の演算はふつうの数と同じように計算できる．たとえば $A-(B-C+D)=A-B+C-D$ という具合に計算できる．

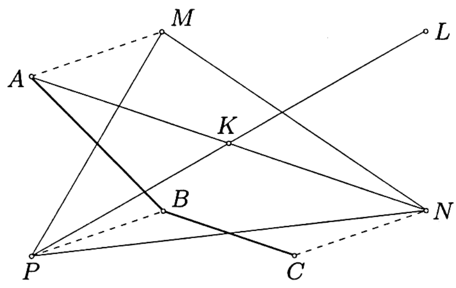



図 1.5　点の和の結合性

**問題 2** 三角形 $ABC$ の中線の交点を $M$ とする．このとき，$A \underset{M}{+} B \underset{M}{+} C$ を求めよ．

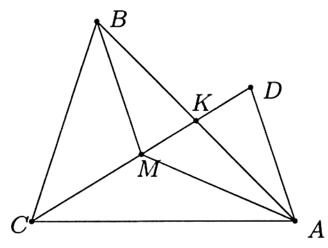



図 1.6　三角形の頂点の和

**解答．** 任意の中線は点 $M$ で $2:1$ の比に分けられる．したがって，図 1.6 において，$CM=2MK$ である．$D=A \underset{M}{+} B$ は，中線 $CK$ の延長線上の点で，$DK=KM=\frac{1}{2}MC$ をみたすものである．ゆえに，$DM=MC$, $D \underset{M}{+} C=M$.

面白いことに，中線の交点は $A \underset{M}{+} B \underset{M}{+} C=M$ をみたすただひとつの点に

なっている．これを証明するにはまず，点の和において，極を取り替えるための公式を導こう．次の 2 つの関係式を証明しよう．

$$A \underset{Q}{+} B = A \underset{P}{+} B \underset{P}{-} Q \tag{1.1}$$

$$A \underset{Q}{-} B = A \underset{P}{-} B \underset{P}{+} Q \tag{1.2}$$

最初の等式は，$(A \underset{Q}{+} B) \underset{P}{+} Q = A \underset{P}{+} B$ と書き直せる．これは図 1.7 から明らか．二番目の等式については，$A \underset{P}{-} B \underset{P}{+} Q$ が方程式 $B \underset{Q}{+} X = A$ の解であることを確かめよう．実際，一番目の等式を用いると，次の式を得る．

$$B \underset{Q}{+} (A \underset{P}{-} B \underset{P}{+} Q) = B \underset{P}{+} (A \underset{P}{-} B \underset{P}{+} Q) \underset{P}{-} Q = A$$

関係式 (1.1), (1.2) のそれぞれの左辺には $P$ が現れない．よって，右辺は $P$ のえらび方によらない．このことは，次の練習 3 のように一般化される．

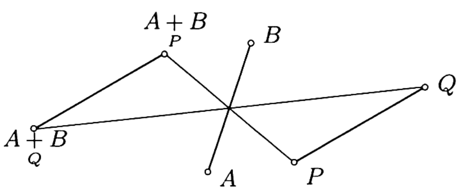



図 1.7 基点の変換

**練習 3.** 式

$$A_1 \underset{P}{+} A_2 \underset{P}{+} \cdots \underset{P}{+} \cdots \underset{P}{+} A_k \underset{P}{-} B_1 \underset{P}{-} B_2 \underset{P}{-} \cdots \underset{P}{-} B_l$$

の計算結果が極 $P$ のえらび方によらないための条件を調べよ．

証明を続けよう．点 $N$ が中線の交点 $M$ と同じ性質，すなわち，等式 $A \underset{N}{+} B \underset{N}{+} C = N$ をみたすとする．等式をこわさずに極を引き算することができるから，$A \underset{N}{+} B \underset{N}{+} C \underset{N}{-} N \underset{N}{-} N = N$ が成り立つ．練習 3 が解けた人は，左辺が極 $N$ のえらび方に依らないことがわかるだろう．とくに，極 $N$ の代わりに，$M$ を入れてみれば，$M \underset{M}{-} N \underset{M}{-} N = N$ となる．一方 $N \underset{M}{+} N \underset{M}{+} N = N$

であるから，$N = M$ となる．これは，$M$ が問題 2 で示された性質をもつただ 1 つの点であることを意味する．

**練習 4.** 中心 $O$ の円に三角形 $ABC$ が外接している．$H$ を三角形 $ABC$ の各頂点から対辺へ向かう 3 垂線の交点とする．このとき，$A \underset{O}{+} B \underset{O}{+} C = H$ が成り立つことを示せ．

## §1.3　点の実数倍

与えられた極 $P$ に関して，点 $A$ に実数 $\alpha$ をかけて，点 $B = \alpha_P A$ を得ることができる．

**定義 2** 極 $P$ に関する点 $A$ の実数 $\alpha$ 倍とは，直線 $PA$ 上の点で $P$ からの距離が $|\alpha||PA|$ であるような点 $B$ である．ただし，$\alpha > 0$ ならば $A$ と同じ側に，$\alpha < 0$ ならばその反対側にとるとする．とくに，どのような点もゼロ倍されると極 $P$ となり，極 $P$ 自身は，何倍されても極 $P$ のままである．

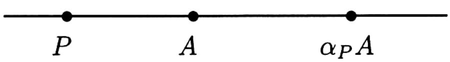



図 1.8　点の実数倍

次のようにも言うことができる．この演算は，ベクトル $\overrightarrow{PA}$ の起点 $P$ をピンでとめて，長さを伸ばしたり縮めたりすることを意味している．すなわち，$\overrightarrow{PB} = \alpha\overrightarrow{PA}$ である．容易にわかるように，点に数をかける演算には，次の性質がある．

5°　$1_P A = A$

6°　$\alpha_P(\beta_P A) = (\alpha\beta)_P A$

7°　$(\alpha + \beta)_P A = \alpha_P A \underset{P}{+} \beta_P A$

8°　$\alpha_P(A \underset{P}{+} B) = \alpha_P A \underset{P}{+} \alpha_P B$

点の**自然数** $n$ 倍は，点を $n$ 回足し算することである: $n_P A = A \underset{P}{+} A \underset{P}{+} \cdots \underset{P}{+} A$ ($A$ が $n$ 回繰り返し足される) と同じである．この事実を用いると，点 $\frac{1}{2}{}_P A$

が方程式 $X \underset{P}{+} X = A$ の (ただひとつの) 解であることがわかる．

**極 $P$ に関する線形結合**，すなわち，いくつかの点に係数をつけて足し合わせたもの

$$\alpha_P A \underset{P}{+} \beta_P B + \cdots \underset{P}{+} \omega_P Z = S \tag{1.3}$$

を考える．一般に，点 $S$ は極 $P$ のえらび方に依存する．$\alpha, \beta, \ldots, \omega$ が整数であるとき，練習 3 で条件によっては結果が極 $P$ のえらび方に依らないことを調べた．同じことが係数をもっと一般に実数にしたときにも成り立つ．たとえば，点 $M = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ は極 $P$ のえらび方に依らず，線分 $AB$ の中点となる．

**練習 5.** (練習 3 の一般化) 線形結合 $S$ (1.3) が極 $P$ のえらび方に依らないための必要十分条件を，係数 $\alpha, \beta, \ldots, \omega$ を用いて表せ．

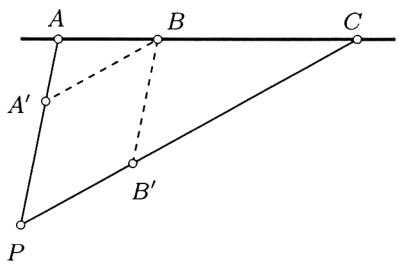



図 1.9　端点によって表される線分上の点

点の和と点の実数倍を使えば，線分 $AB$ の上の端点も含めてすべての点を表すことができる．実際，$C$ を線分 $AB$ を $k:l$ に内分する点とし (定義から，$l \cdot \overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{CB}$ と書ける)，直線 $AB$ の外に勝手な点 $P$ をえらび，これを極としよう．$C$ を通って $PB$ および $PA$ に平行な 2 直線を引く．そして，それぞれが $PA$, $PB$ と交わる点を $A'$, $B'$ とする (図 1.9)．このとき，次の式が成り立つ．

$$\begin{aligned} \frac{PA'}{PA} &= \frac{BC}{BA} = \frac{l}{k+l} \\ \frac{PB'}{PB} &= \frac{AC}{AB} = \frac{k}{k+l} \end{aligned}$$

$\frac{l}{k+l} = \alpha$, $\frac{k}{k+l} = \beta$ とおくと，$C = A' + B' = \alpha A + \beta B$ となるから，$\alpha + \beta = 1$ であることがわかる．

逆も正しい．$\alpha$ と $\beta$ を $\alpha + \beta = 1$ をみたす任意の負でない数とすると，$C = \alpha A + \beta B$ は線分 $AB$ 上の点となる．更に，$\alpha + \beta = 1$ で，$\alpha$ と $\beta$ のどちらかが負であるとき，$C$ は線分 $AB$ の外側ではあるが，直線 $AB$ 上の点となる．図 1.9 を適当に直せば，$\alpha = \frac{l}{k+l}$, $\beta = \frac{k}{k+l}$ が依然として成り立つことが確かめられる．ただし，比 $k : l$ は負になってしまうが．

以上より，直線 $AB$ は $\alpha$ が任意の実数であるとき，$\alpha A + (1 - \alpha)B$ で表されるすべての点集合となり，線分 $AB$ は，$0 \leq \alpha \leq 1$ で定義される部分集合となることがわかる．ここに述べたことは基点 (極) のえらび方に依らないことに注意しよう．

**練習 6.**　凸 $n$ 多角形 $A_1A_2 \cdots A_n$ のすべての内点集合に対する同様の記述を試みよ．

練習 6 を済ませたら，再度，練習 2 をこの新しいテクニックで解いてみよう．

**練習 7.**　四辺形の対辺の中点どうしをむすぶ 2 つの線分と，2 つの対角線の中点どうしをむすぶ線分は 1 点で交わり，どの線分もこの交点で等分されることを証明せよ (図 1.10 参照)．

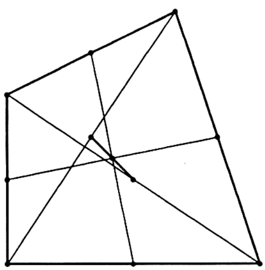


図 1.10　練習 7 の四辺形

## §1.4　重心

問題 2 で三角形 $ABC$ の中線の交点 $M$ は方程式 $A \underset{M}{+} B \underset{M}{+} C = M$ の (ただひとつの) 解として，姿をみせない形で定義された．我々はもう $M$ を $A$, $B$, $C$ を用いてはっきりと表すことができるだろう．やってみよう．方程式の両辺に $\frac{1}{3}$ をかけると，$\frac{1}{3}{}_M(A \underset{M}{+} B \underset{M}{+} C) = M$ となる．練習 5 によると，左辺は極のえらび方に依らないから，

$$M = \frac{1}{3}(A + B + C)$$

と書くことができる．

同様にして，四辺形の対辺の中点どうしをむすぶ 2 線分の交点 (練習 7 参照) は

$$M = \frac{1}{4}(A + B + C + D)$$

と書ける．

一般に，いくつかの点の (任意の極に関しての) 相加平均 $M = \frac{1}{n}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)$ を，それらの点からなる系の**重心** あるいは**質量中心**という．このように，三角形の重心 (より正確には三角形の頂点の重心) は，中線の交点となる．重心のからむ幾何学的な問題が点の演算で解かれる例をいくつかみよう．

**問題 3**　3 点 $A$, $B$, $C$ を一直線上の点とし，$E$, $F$ を平面上の任意の 2 点とする．このとき，三角形 $AEF$, $BEF$, $CEF$ のそれぞれの重心は，一直線上にあることを証明せよ．

**解答．** 定義より，重心は頂点の相加平均である．

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(A + E + F) &= K \\ \frac{1}{3}(B + E + F) &= L \\ \frac{1}{3}(C + E + F) &= M \end{aligned}$$

仮定より，$C$ は直線 $AB$ 上の点であるから，$C = \alpha A + (1 - \alpha)B$ となる．したがって，$\alpha K + (1 - \alpha)L = \frac{\alpha}{3}(A + E + F) = \frac{1-\alpha}{3}(B + E + F) = \frac{1}{3}(C + E + F) = M$ が成り立つ．これは $M$ が直線 $KL$

上の点であることを示している．

**練習 8.**　$A, B, C, D, E, F$ が六角形の各辺の中点を順番にとったものとする．このとき，三角形 $ACE$ と三角形 $BDF$ の重心は一致することを証明せよ．

**練習 9.**　四辺形 $ABCD$ において，辺 $AB$ の中点を $E$, 辺 $CD$ の中点を $K$ とする．このとき，4 線分 $AK, CE, BK, ED$ の中点は，平行四辺形をなすことを証明せよ．

**問題 4** 四辺形において，重心と対角線の交点が一致するための必要十分条件は，2 組の対辺 (練習 7 参照) がともに平行となることを証明せよ．

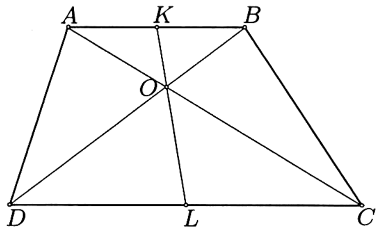



図 1.11　台形

**解答.** 対角線の交点 $O$ を極としよう (図 1.11)．このとき，適当な数 $\alpha, \beta$ によって，$C = \alpha A$, $D = \beta B$ となり，中点 $K, L$ は $K = \frac{1}{2}(A+B)$, $L = \frac{1}{2}(\alpha A + \beta B)$ となる．

$AB \parallel CD$ ならば，$\triangle OBA$ と $\triangle ODC$ は相似であるから，$\alpha = \beta$, $L = \alpha K$ で，3 点 $K, L, O$ は一直線上にあることになる．

逆に，$AB$ が $CD$ と平行かどうかはわからないが，3 点 $K, L, O$ が一直線上にあると仮定しよう．極 $O$ に関する点の演算を用いて，適当な実数 $\gamma$ に対して $L = \gamma K$ を得る．先の $K,L$ の式に代入すると，$\alpha A + \beta B = \gamma A + \gamma B$, $(\alpha - \gamma)A = (\gamma - \beta)B$ となる．しか

し，$(\alpha-\gamma)A$ と $(\gamma-\beta)B$ は，それぞれ，異なる 2 直線 $OA, OB$ 上にあるから，もしそれらが一致するとしたら点 $O$ になる他はない．このように，$\alpha-\gamma=\gamma-\beta=0, \alpha=\beta$ で，三角形 $OAB$ と三角形 $ODC$ は相似であることがわかる．ゆえに，$AB \parallel CD$.

**練習 10.** 点の和と点のスカラー倍を用いて，三角形の中線が重心によって 2 : 1 に内分されることを証明せよ (問題 2 参照).

**練習 11.** ある直線が平行四辺形の隣合う二辺を 1/3, 1/4 に切るとする．ただし，二辺の共通頂点側にそれぞれの短い切片がくるようになっているとする (図 1.12). このとき，平行四辺形の対角線は，どのような比でわけられるか.

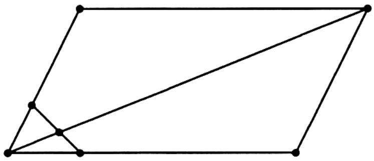


図 1.12 対角線を切る

## §1.5 座標

問題 4 の議論の中で次の事実を用いた.

**『2 点 $M$, $N$ が極と同一直線上に並ばないならば，等式 $\alpha M+\beta N=\gamma M+\delta N$ が成り立つのは，$\alpha=\beta$ かつ $\gamma=\delta$ のときであり，しかもそのときに限る.』**

実際，与えられた等式は，$(\alpha-\gamma)M=(\delta-\beta)N$ と書き換えられる．これをみれば，$\alpha=\gamma$ かつ $\beta=\delta$ が成り立つことがわかる.

極 $P$ と 2 点 $M, N$ を，同一直線上に並ばないようにとる．このとき，平面上の任意の点 $Z$ は適当な実数 $x, y$ によって，$Z=xM+yN$ と書ける (図 1.13).

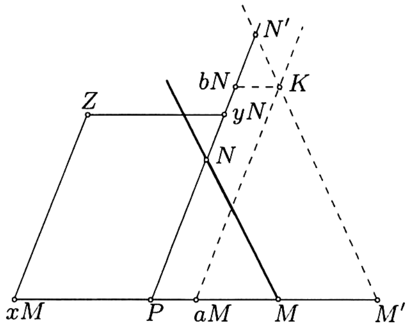



図 1.13 アフィン座標

**定義 3** 平面上のアフィン座標系とは，順序づけられた独立な 3 点の集合 $\{P, M, N\}$ である．点 $P$ を**極**あるいは**原点**といい，集合 $\{M, N\}$ を与えられた座標系の**基底点**という．座標系 $\{P, M, N\}$ における $Z$ の座標は，展開式 $Z = x_P M + y_P N$ の係数 $\{x, y\}$ である．

先の議論によると，点 $Z$ の座標 $x, y$ は**一意的に** 決まるから，平面上の点と実数の組に 1 対 1 の対応が得られる．

一般に，このような座標を**アフィン座標**という．$\angle MNP$ が直角で，$|PM| = |PN|$ であるなら，お馴染みのデカルト座標である．

2 点の和はそれらの座標の和である．

$$(aM + bN) + (cM + dN) = (a + b)M + (c + d)N$$

点のスカラー倍はその点の座標のスカラー倍である．

$$c(aM + bN) = (ca)M + (cb)N$$

平面上の点と，実数のペアの対応は，幾何学の命題と代数学の命題の双方向の翻訳のための辞書として用いられる．どのような図形も，座標がある関係式をみたす点の集まりである．たとえば，点が直線 $MN$ に属する必要十分条件は，その点が $x + y = 1$ という条件つきで $xM + yN$ と表されることである．この意味で，$x + y = 1$ は，**直線 $MN$ の方程式**である．

**問題 5** $K(a, b)$ を通り，$MN$ に平行な直線の方程式を求めよ．

**解答．** 求める直線と $PM$, $PN$ との交点をそれぞれ $M'$, $N'$ とす

る．$M'N' \parallel MN$ より，適当な $t$ によって $M' = tM$, $N' = tN$ と書ける (図 1.13)．$M'N'$ 上の任意の点 $Z$ は $\alpha + \beta = 1$ として $\alpha M' + \beta N'$ のように表せる．すなわち，$Z = \alpha tM + \beta tN$ かつ $\alpha t + \beta t = t$ である．このように，任意の点 $Z \in MN$ の座標 $x = \alpha t, y = \beta t$ は，関係式 $x + y = t$ をみたす．ただし，$t$ の値はまだわからない．$t$ の値を知るには，$K$ がいま問題にしている直線上にあることに注意すればよい．すなわち，$a + b = t$ が成り立つ．したがって，求める直線の方程式は $x + y = a + b$ である．

**練習 12.** 点 $K(a, b)$ を通る次の直線の方程式をそれぞれ求めよ．

(1) $PM$ に平行な直線．

(2) $PN$ に平行な直線．

(3) $P$ を通る直線．

**問題 6** ある三角形領域において，1 つの辺に平行に進んできた光がその他の辺にあたると反射して第 3 の辺の方向に出て行くという法則が成り立つと仮定しよう．この三角形の中に立っている人が 1 つの辺に平行に懐中電灯をつけるとする．このとき，自分の背中を照らすことになる．これを証明せよ．

**解答.** この三角形の 1 つの頂点を極に，その他の 2 つの頂点を基底点とする (図 1.14)．この座標系で計算しよう．人が点 $K(a, b)$ に立って懐中電灯を $PN$ に平行に向け，辺 $PM$ 上の点 $A$ に光が当たるとする．点 $A$ の座標は $(a, 0)$ である．なぜならば，$KA \parallel PN$ だから点 $A$ の第 1 座標は $K$ のそれと同じで (練習 12 参照)，$A$ は $PM$ の上にあるから，第 2 座標は 0 となるからである．

光の経路の直線部分 $AB$ は，$MN$ に平行である．問題 5 によれば，直線 $AB$ の方程式は $x + y = a$ となる．なぜならば，$a$ は $A$ の第 1 座標と第 2 座標の和になるからである．点 $B$ は $PN$ 上にあるから $x = 0$ である．よって，第 2 座標は $a$ となる．

こんな具合に議論を進めれば，次々と光線と辺との交わりを計算す

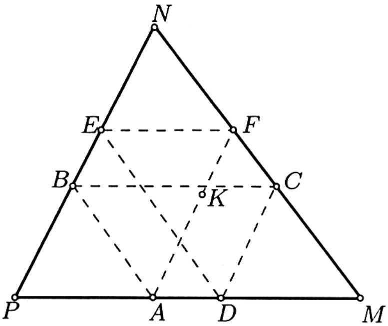



図 1.14　三角形のなかのジグザグ

ることができる．それらは $C(1-a,a)$, $D(1-a,0)$, $E(0,1-a)$, $F(a,1-a)$ のようになる．直線 $FK$ は $PN$ に平行である．だから，光線は後ろから出発点 $K$ に戻ることがわかる．

用心深い読者は，先の議論の弱点を指摘したかもしれない．実のところ光線は $ABCDEF$ を完全に巡る前に点 $K$ に戻る可能性がある —— つまり，後ろからではなく横から光があたる可能性がある．

**練習 13.**　問題 6 の光線の軌道が 6 本ではなく 3 本の線分だけで構成されるような三角形 $MNP$ 内の点 $K$ をすべて図示せよ．

**練習 14.**　$K$ を三角形 $MNP$ の内部点とし，直線 $AK$, $BK$, $CK$ が辺 $BC$, $CA$, $AB$ と交わる点をそれぞれ $D$, $E$, $F$ とする (図 1.15)．このとき，等式 $KD/AD + KE/BE + KF/CF = 1$ が成り立つことを証明せよ．

**練習 15.**　図 1.15 のように，三角形 $ABC$ の辺上に 3 点 $D$, $E$, $F$ が与えられている．3 直線 $AD$, $BE$, $CF$ が 1 点で交わるのは，等式 $AF \cdot BD \cdot CE = FB \cdot DC \cdot EA$ が成り立つときで，しかもそのときに限ることを証明せよ (チェバの定理)．

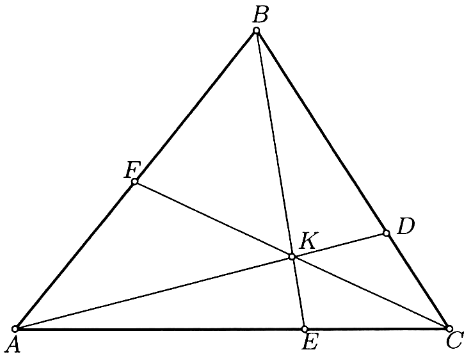



図 1.15　1 点で交わる三角形の中の直線

## §1.6　点の積

平面上の点を実数倍することをすでに学んだ．実数は直線上の点で表せることを思いおこそう．この直線を極 $P$ と原点が一致するように平面におく．極は点の和あるいは点のスカラー倍という演算を定義するのに用いられる．実数直線の上の 1 に対応する点を $E$ (図 1.16a) としよう．

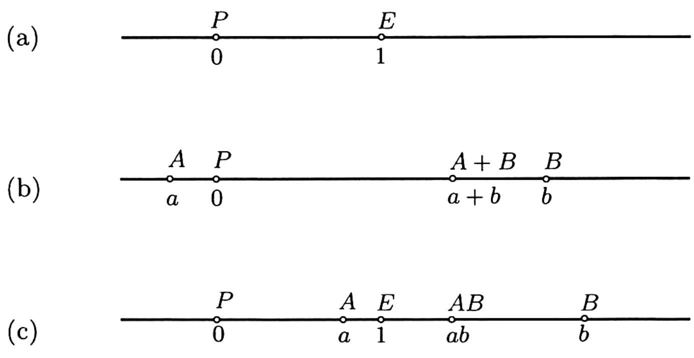



図 1.16　直線上の代数的な演算

点の和の定義は，ふつうの実数の和の定義と次のような意味で一致する．$A$, $B$ をそれぞれ数 $a$, $b$ に対応する点とすると，(極 $P$ に関する) 和 $A+B$ は，数 $a+b$ (図 1.16b) に対応している．

さらに，点のスカラー倍の演算は，この実数直線上に制限すると，ふつうの数の積に次の意味で一致する．$A \leftrightarrow a$, $B \leftrightarrow b$ のとき，$a_P B$, $b_P A$ のどちらの点も，数 $ab$ に対応する．この点を $A$ と $B$ の積といい，$AB$ と表すことにする．

さて，この定義を平面全体にひろげよう．任意の2点 $A$, $B$ に対して，新しい点 $AB$ を与えるための規則をこの点の積 $AB$ がふつうの数の積における次のような規則をみたすように決めたい：

9° 結合法則

$$(AB)C = A(BC)$$

10° 交換法則

$$AB = BA$$

11° 同じ極上の点の和に関する分配法則

$$A(B + C) = AB + AC$$

さらに，その新しい演算が，前に定義された点のスカラー倍の演算と一致するようにしたい．すなわち，平面上の任意の点 $Z$ と実数直線上の任意の点 $A$ に対して，$AZ = a_P Z$ となることが必要である ($a$ は $A$ に対応する実数)．とくに，これは実数直線上の単位点 $E$ が数1の役目をすべての平面上の点 $Z$ に対して果たすことを意味する．つまり $EZ = 1_P Z = Z$.

そのような演算が平面上の点に対して定義可能なのかどうかはすぐにはわからない．しかしながら，実際には多くの定義の仕方がある．そして，これから調べていくと本質的には3つの異なる定義の仕方があることがわかる．まず，少し複雑な定義をしてみよう．

**問題 7** $EABCDK$ を点 $P$ を中心とする正六角形とする．ただし，$E$ は，実数直線上の1に対応する点とする．何らかのかけ算が定義されているとして $A^2 = B$ と仮定したとき，この六角形の頂点のペアの積をすべて求めよ．

**解答．** 極 $P$ をとり，基底点 $E$, $A$ (図 1.17) を用いて，すべての頂点を展開すると，$B = A - E$, $C = -E$, $D = -A$, $K = E - A$ となる．基底点どうしの積は，$E^2 = E$, $EA = A$, $A^2 = B$ のよ

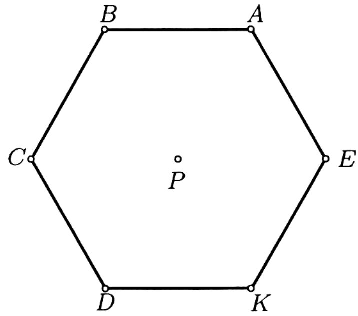



図 1.17　六角形の頂点の積

うにわかっている．分配法則によって，$BK = (A - E)(E - A) = -A^2 + 2AE - E^2 = -B + 2A - E = A$ のような計算ができる．他の積も同様にしてわかるから，次の積表が得られる．

| | $E$ | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $K$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $E$ | $E$ | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $K$ |
| $A$ | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $K$ | $E$ |
| $B$ | $B$ | $C$ | $D$ | $K$ | $E$ | $A$ |
| $C$ | $C$ | $D$ | $K$ | $E$ | $A$ | $B$ |
| $D$ | $D$ | $K$ | $E$ | $A$ | $B$ | $C$ |
| $K$ | $K$ | $E$ | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |

注目してほしいことは，六角形の 6 頂点が，いまとりあげた積に関して閉じている，すなわち，任意の 2 つの頂点の積は再び頂点となることである．

**練習 16.**　問題 7 の正六角形の頂点の集合は，次で定義される積に関して閉じているか：

(a) $A^2 = A$
(b) $a^2 = P$
また，その積表を作成せよ．

**練習 17.**　極 $P$ を中心とする正五角形 $EABCD$ の積表を作成せよ．た

だし，$A^2 = B$ とする．

例をながめたので，これから一般の場合を考察しよう．先のすべての必要条件をみたす積が定義されているとする．

すでに決まっている $P = 0$ と $E = 1$ 以外の任意の点 $F$ を直線 $PE$ の外にとる．$(E, F)$ の組は極 $P$ に関する基底点として使える．問題7で議論したように，点の積は $F$ の平方がわかれば完全に決まるのである．

適当な実数 $\alpha, \beta$ をみつけて $F^2 = \alpha E + \beta F$ と書ける．別の点 $G$ をみつけて，基底点の組を $(E, G)$ にとり直し，平方 $G^2$ の展開がもっと簡単になるようにしよう．

$G = F - \frac{\beta}{2}E$ とおく．このとき，直線 $FG$, $PE$ は平行となり，$E$, $G$ は基底点となる．

$$
\begin{aligned}
G^2 &= (F - \frac{\beta}{2}E)^2 \\
&= F^2 - \beta EF + \frac{\beta^2}{4}E^2 \\
&= (\alpha + \frac{\beta^2}{4})E
\end{aligned}
$$

この関係式をよくみてみると，基底点の組 $(E, G)$ のもとでの積は，最初の基底点の組 $(E, F)$ のときより簡単になることがわかる．なぜならば，第2基底点の平方が2点の線形結合ではなく，単に係数つきの $E$ に過ぎないのだから．さらに，積の規則を簡単にするため，係数の符号を眺めながら $G$ を書き換えてみよう：

1. $\alpha + \dfrac{\beta^2}{4} = 0$ のとき (練習 16b 参照)．この場合，積は次の式で与えられる．

$$
\begin{gathered}
E^2 = E, \quad EG = G, \quad G^2 = 0 \\
(aE + bG)(cE + dG) = acE + (ad + bc)G
\end{gathered}
$$

2. $\alpha + \dfrac{\beta^2}{4} > 0$ のとき．$\dfrac{1}{\sqrt{\alpha + \beta^2/4}}G = H$ とおくと，基底点の組 $(E, H)$ のもとで次の積公式が得られる：

$$
\begin{gathered}
E^2 = E, \quad EH = H, \quad H^2 = E \\
(aE + bH)(cE + dH) = (ac + bd)E + (ad + bc)H
\end{gathered}
$$

(読者は，練習 16b の六角形の頂点でこのような $H$ をさがしてみよう．)

3. $\alpha+\dfrac{\beta^2}{4}<0$ のとき．$I=\dfrac{1}{\sqrt{|\alpha+\beta^2/4|}}G$ とおくと，次が成り立つ：

$$E^2=E,\quad EI=I,\quad I^2=-E$$
$$(aE+bI)(cE+dI)=(ac-bd)E+(ad+bc)H$$

これら 3 つの場合のどれもが，先の積に関する必要条件をすべてみたすことが簡単にわかる．次の問題は積が逆の演算である割算が可能かということ．すなわち，方程式 $AX=B$ が $A\neq 0$ のときに $X$ について解けるかということである．

第 1 の場合，$E$ を $G$ で割ってみよう．つまり，$Z=xE+yG$ とおいて $GZ=E$ をみたす $Z$ をさがす．定義から $G(xE+yG)=xG$ となるのでこれは決して $E$ にはならない．という訳で割算は一般にだめである．

同じことが第 2 の場合にも言える．読者は $H$ が $E+H$ で割れないことを確かめてみよう．

しかし，第 3 の場合，ゼロでない点による割算はいつも可能である．確かめてみよう．係数が同時に消えることがない $M=aE+bI$，$N=cE+dI$ をとってくる．商 $M/N$，言い換えると $NZ=M$ 詳しくは $(cE+dI)(xE+yI)=aE+bI$ となる $Z=xE+yI$ を求めよう．展開するとこの方程式は，次の連立方程式と同値になる：

$$\begin{cases} cx-dy &= a \\ dx+cy &= b \end{cases}$$

これは $c^2+d^2\neq 0$ の条件下でただひとつの解 $x=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}$, $y=\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$ をもつ．

これまでのことより，次のことがわかる．

**定理 2** 平面上の点の積は本質的に 3 つの異なる方法で定義できる．それは，次の性質をもつ元 $X$ が存在するかどうかによって異なってくる：

1. $X^2=0$
2. $X^2=1$
3. $X^2=-1$

第3の場合だけ，0でない元による割算が可能となる．

正式には，実数体上の3つの異なる2次元の代数系が存在し，それらのうち1つ（第3の場合）だけが割算をともなう代数系になるということである．

積の幾何学的意味は，原点 $P$ に関する $E$ と $I$ の相互の位置関係に依存する．たとえば，四辺形 $PEAB$ が線分 $PE$ 上にあったとする．このとき，点 $A^2$ はどこにくるだろうか．これは，点 $I$ のえらび方に依存する．$I$ が $A$ に一致するならば，$A^2 = -E$ となり．$I$ が $B$ に一致するならば

$$A^2 = (B+E)^2 = B^2 + 2BE + E^2 = -E + 2B + E = 2B$$

となる．もちろん，他の選択も可能である．そして答えも様々である．

いろいろ可能性はあるがとくに $I = A$，すなわち，$I$ が $E$ を $90°$ 正の方向に（反時計回りに）回転させて得られる場合をとり，次の節ではそれを詳しく研究することにする．

## §1.7　複素数

直線 $PE$ 上の点は実数と同一視する．平面上の点の間に代数的な演算を定義したので，平面は実数より広い数の世界とみなすことができる．これらの数を**複素数**とよぶ．慣例的に，極 $P$ を0，点 $E$ を1，点 $I$ を $i$ または $\sqrt{-1}$，$aE + bI$ を $a + bi$ と表す．この表記法で先の代数的な演算の定義を書き直すと，次のようになる：

$$\begin{aligned}(a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i\\(a+bi)-(c+di) &= (a-c)+(b-d)i\\(a+bi)(c+di) &= (ac-bd)+(ad+bc)i\\\frac{a+bi}{c+di} &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\end{aligned}$$

簡単に言うと，この演算は $i^2 = -1$ という簡約ルールをともないながら「変数」$i$ の多項式の演算のように計算される．商に関する公式を導くときは，分母と分子に同じ数 $c - di$ をかければよい．

2つの基本複素数 1, $i$ はそれぞれ**実数単位**, **虚数単位**とよばれる．

**練習 18.**　次の複素数の計算をせよ：

(a) $\dfrac{3-5i}{1+i} - i(3+4i) + \dfrac{1}{i}$

(b) $\sqrt{3-4i}$

(c) $(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{2004}$

$z = a + bi$ とする．点 $z$ と点 0 の距離を複素数 $z$ の大きさ，あるいは絶対値と呼び，$|z|$ と表す．$a$ と $b$ は $z$ のデカルト座標だから，$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ であることがわかる．たとえば，$\cos t + i \sin t$ と $\dfrac{2t}{1+t^2} + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}i$ の大きさは，任意の実数 $t$ に対して，ともに 1 となる．

0, $w$, $z$, $z-w$ は，平行四辺形をなすから，$z$ と $w$ の距離は，$|z-w|$ となる (図 1.18 参照)．

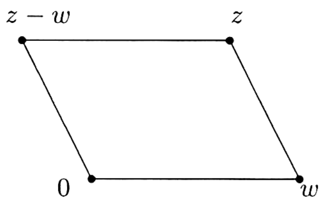



図 1.18　複素数平面上の平行四辺形

**練習 19.** 次の条件をみたす複素平面上のすべての点 $z$ の集合を求めよ：

(a) $|z+3| = 5$

(b) $|z+4| = |z-2i|$

(c) 2 つの固定点と $z$ とのおのおのの距離の 2 乗の和が一定である．

代数的な問題を純粋に考えるとき，$\sqrt{a^2+b^2}$ が 2 点間の距離であるという事実によって，幾何学的な定理や直観を適用することができる．

**問題 8** 次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\cdots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$
$$\geq \sqrt{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2+(b_1+b_2+\cdots+b_n)^2}$$

**解答.** $z_1=a_1+b_1i,\cdots,z_n=a_n+b_ni$ とおき，折れ線 $0,z_1,z_1+z_2,\ldots,z_1+z_2+\cdots+z_n$ を考える．不等式の左辺は，この折れ線の全長であり，右辺は両端の点の間の距離である．

**練習 20.** 任意の実数 $x_1,\ldots,x_{10}$ に対して，次の不等式を証明せよ．

$$\sqrt{x_1^2+(1-x_2)^2}+\sqrt{x_2^2+(1-x_3)^2}+\cdots+\sqrt{x_{10}^2+(1-x_1)^2}>7$$

半直線 01 を反時計回りに回転させて点 $z$ を通るようにするための角度を複素数 $z$ の偏角といい，$\arg z$ と表す．ここで，0 と 1 は，それぞれ，数 0, 1 に対応する点である．

**練習 21.** 次の複素数の偏角を求めよ: $2$, $i$, $-3$, $-2i$, $1+i$, $\sqrt{3}-i$.

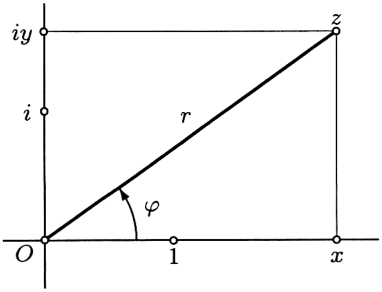



図 1.19 極座標

複素数は，大きさ $r$ と偏角 $\varphi$ がわかれば決まる．実際，図 1.19 のように $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ とすれば，$z=x+yi$ となるから，次のように表せる．

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

この表現を複素数の**極形式**とよぶ．

しかし，複素数と実数のペアの対応 $z \leftrightarrow (r, \varphi)$ は 1 対 1 ではない．まず，0 の偏角は未定義である．0 以外の複素数については偏角はきっちりもとに戻ってくる回転の分だけ不定である．たとえば，1 の偏角は 0, $-2\pi$, $2\pi$, $-4\pi$, $4\pi, \ldots$ のどれをとってもよい．それにもかかわらず，$(r, \varphi)$ というペアは点 $z$ の座標とみなされ，**極座標**とよばれる．この座標は空港の管制塔で使われている．飛行機の位置を知るのに，まず方向をみつけだし，次に距離を計る．

図形の方程式は，極座標で書くと簡単になることがある．

**練習 22.** (a) 方程式 $r = |\cos 3\varphi|$ の表す曲線をプロットせよ．(b) 図 1.20 のような 6 枚の花びらをもつ花の方程式を極の方程式とデカルト座標で表せ．

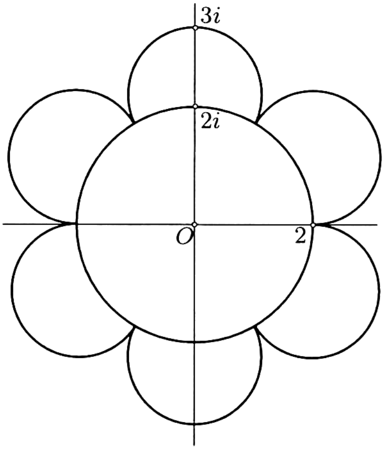



図 1.20　複素数平面上の花

複素数の積は，絶対値と偏角で表すと簡単である．実際，次の式が成り立つ：

$$|zw| = |z||w| \tag{1.5}$$

$$\arg(zw) = \arg z + \arg w \tag{1.6}$$

一番目の式は，$(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ から導かれ

る．二番目の式を証明する．

**証明** $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = s(\cos\psi + i\sin\psi)$ とおくと，

$$\begin{aligned} zw &= rs(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) \\ &= rs((\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi) \end{aligned}$$

となる．簡単にすると，次の式となる．

$$zw = rs(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi))$$

□

上の証明は，よく知られている三角関数の加法定理に基づくものである．ここで，もうひとつエレガントな証明をしてみよう．それは，初等ユークリッド幾何学しか使わない証明であるが，ついでながら三角関数の加法定理も導かれる．

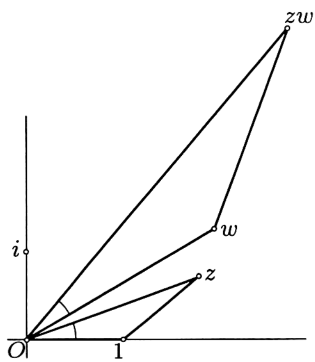



図 1.21　複素数の積

**別証** 0, 1, $z$ と 0, $w$, $zw$ をそれぞれ 3 頂点とする 2 つの三角形を考える (図 1.21). $|w| : 1 = |zw| : |z| = |zw - w| : |z - 1|$ より，この 2 つの三角形は相似である．よって，対応する角は等しい．図 1.21 にマークされている 2 つの角が等しいことから，$\arg(zw) = \arg z + \arg w$ が得られる．□

複素数の積では，絶対値がかけられ，偏角が足される．積を必要なだけ繰

り返せば，この結果は複素数の巾乗の三角関数による次の公式を導く．

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

**練習 23.** $z + 1/z = 2\cos\alpha$ のとき，等式 $z^n + 1/z^n = 2\cos n\alpha$ が成り立つことを示せ．ただし，$z$ を複素数，$a$ を実数とする．

三角関数による巾乗公式は，練習 18(c) のような問題にも役に立つ．ここでもう一度解いてみよう．$\zeta = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とおく．そのとき，$|\zeta| = 1, \arg\zeta = -\pi/6$ だから，$|\zeta^{1998}| = 1^{1998} = 1$ ，$\arg\zeta^{1998} = 1998\cdot(-\pi/6) = -333\cdot 2\pi$ となる．ゆえに，$\zeta^{1998} = 1$．

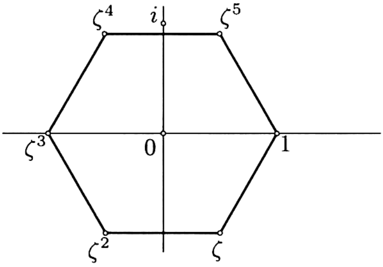



図 1.22　1 の巾乗根

数 $\zeta$ の整数巾は，平面上の 6 点だけを占める．図 1.22 の正六角形の頂点がそれである．それら 6 つのどの複素数も，$\zeta$ の巾乗で 1 の 6 乗根である．一般に，自然数 $n$ に対して，ちょうど $n$ 個の 1 の $n$ 乗根が複素数の範囲で存在する．それらは正多角形の頂点をなす．

**問題 9** 半径 1 の円に内接する正 $n$ 角形を考える．ひとつの頂点からのびるすべての対角線と 2 本の辺の長さの積を求めよ．

**解答．** 多角形の中心に極 (数 0) をおき，頂点 $A_1$ に実数単位 (数 1) をおく．このとき，すべての頂点は，方程式 $z^n - 1 = 0$ の根となる．したがって，$A_1$ 以外の頂点はすべて，$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = 0$

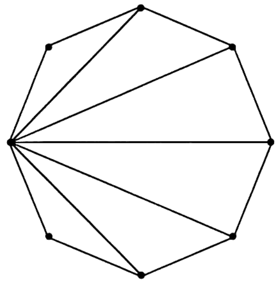


図 1.23　正多角形の辺と対角線

の根となる．この式は，$z^n - 1$ を $z - 1$ で割って得られたものである．次に，多項式 $z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = 0$ と多項式 $(z - A_2)(z - A_3)\cdots(z - A_n)$ を比較しよう．これらは根の集合が等しく，最高次係数も等しいから完全に一致する．よって，$z = A_1$ における値も一致する：

$$(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)\cdots(A_1 - A_n) = A_1^{n-1} + A_1^{n-2} + \cdots + A_1 + 1.$$

$A_1 = 1$ より，次の答えが得られる：

$$|A_1 - A_2||A_1 - A_3|\cdots|A_1 - A_n| = n.$$

**練習 24.**　正多角形 $A_1A_2\cdots A_n$ が単位円に内接しているとする．その円周上の任意の点を $A$ とするとき，$A$ から正多角形のすべての頂点までの距離の平方の和を求めよ．

割算は積の逆演算だから，(1.5) と逆の公式が成り立つ．

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$
$$\arg\frac{z}{w} = \arg z - \arg w$$

初等幾何学の観点では，二番目の等式が面白い．角の大きさが，頂点と2辺上の他の2点によって $\varphi = \arg\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ (図 1.24) のように表現できるか

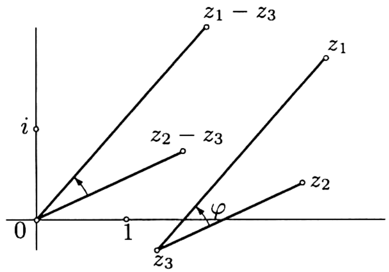



図 1.24 複素数で表された角

らである．ここで，2 つの応用例をあげる．ひとつは幾何の問題を代数で解く問題，もうひとつは代数の問題を幾何的な方法で解く問題である．

**問題 10** 3 つの正方形が図 1.25 のように隣り合って並んでいる．このとき，3 つの角 $\angle KAH$, $\angle KDH$, $\angle KFH$ の和が直角となることを証明せよ．

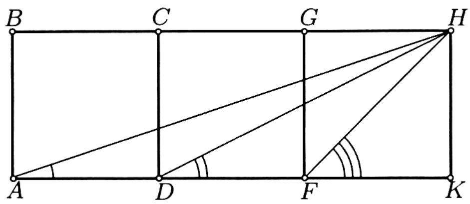



図 1.25 3 つの角の和

**解答．** $A = 0$, $D = 1$, $B = i$ とすると，$F = 2$, $K = 3$, $H = 3 + i$ となる．したがって，$\angle DAH = \arg \frac{H-A}{D-A} = \arg(3+i)$, $\angle FDH = \arg \frac{H-D}{F-D} = \arg(2+i)$ より $\angle DAH + \angle FDH = \arg(3+i)(2+i) = \arg(5+5i) = \pi/4$ を得る．

**問題 11** 互いに異なる複素数 $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ が等式 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$ をみたすとき，次の式の値は，実数となることを証明せよ．

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$$

**解答.** 与えられた4点は，0を中心とする一つの円周上に並ぶ．2点 $z_1, z_2$ によって，この円周は2つの弧にわかれる．他の2点 $z_3, z_4$ は，同じ弧の上にあるか異なる弧の上にあるかどちらかである．前者の場合，$\angle z_1 z_3 z_2$ と $\angle z_1 z_4 z_2$ は，同じ弧を見込んでいるから等しい．ゆえに $\arg \dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \arg \dfrac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$，$\arg \dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \dfrac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = 0$. よって，問題の値は実数である．後者の場合，$\angle z_1 z_3 z_2$ と $\angle z_2 z_4 z_1$ は同じ向きをもち，$\angle z_1 z_3 z_2 + \angle z_2 z_4 z_1 = 180^\circ$ である．よって，求める値は負の実数となる．

問題11の主張は任意の円周あるいは直線上にある4つの複素数の場合に拡張される．逆も真である．すなわち，先の式が実数になるならば，与えられた4点はひとつの円周上，あるいは，一直線上にある．

**練習 25.** $c_1, c_2, \ldots, c_n$ を頂点とする凸 $n$ 多角形を考える．

$$\frac{1}{z - c_1} + \frac{1}{z - c_2} + \cdots + \frac{1}{z - c_n} = 0$$

をみたす複素数 $z$ は，この多角形の内点であることを証明せよ．

# 第2章
# 平面運動

平面運動とは，線分の長さを変えない平面変換である．したがって，平面運動を図形に施しても，その図形の面積や角などの形は変化しない．

この章ではまず，初等幾何学でよく知られている問題をとりあげる．これらの問題は基本的に同じアイデア，すなわち図形の位置を部分的に変えることによって解ける．そうすることによって，図形の隠された性質が現れるからである．そのあと，運動の合成について詳しく議論する．これは，次章「変換群」への準備でもある．

## §2.1 平行移動

**定義 4** 平行移動 (あるいは単に移動ともいう) とは，任意の点 $A$ を，$\overrightarrow{AA'}$ が与えられた定ベクトル $\mathbf{v}$ に等しくなるような点 $A'$ にうつす平面変換である．この変換を $T_{\mathbf{v}}$ と表す．

**問題 12** 図 2.1 のように，村 $A$ と村 $B$ の間に川が流れている．その川は真直ぐで川幅が一定である．このとき，折れ線 $AMNB$ の長さが最短となるように橋 $MN$ を架けよ．ただし，橋は川に垂直に架けるものとする．

**解答.** 川がなければ，点 $A$ と点 $B$ をむすぶ最短の道は線分 $AB$ である．一方の川岸をもう一方の川岸に両岸が一致するまで川に垂直に動かし，$B$ が移動した点を $B'$ とする (図 2.1)．このとき，一致した川岸上のどこに点 $M$ をとっても，$AMB'B$ と $AMNB$ の長さは等しい．したがって，$AMB'$ の長さが最小となるような $M$ を求めなければならない．このような $M$ は直線 $AB'$ とその一致した川岸との交点である．

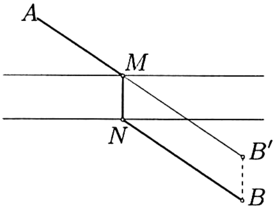



図 2.1　川に架かる橋

**練習 26.**　図 2.2 のように，まっすぐで川幅が一定の 2 つの川が流れている．このとき，その 2 つの川によって分けられる点 $A$ と点 $B$ をむすぶ最短の道を描け．ただし，橋は川に垂直に架けるものとする．

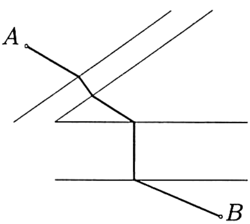



図 2.2　2 つの川に架かる 2 つの橋

**問題 13** 与えられた円に, 与えられたベクトルを内接させよ (つまり与えられた円の弦で, 与えられた線分に平行で長さが等しくなるような弦を作図せよ).

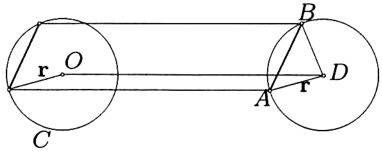



図 2.3　円にベクトルを内接する

**解答.** $AB$ を与えられたベクトル，$C$ を中心 $O$ 半径 $r$ の与えられた円とする (図 2.3)．$C$ に内接するように，$AB$ を $C$ に向かって平行移動しなければならない．実は，逆の操作，すなわち $AB$ の両端点 $A, B$ を通るように，$C$ を動かすほうが簡単である．そのた

め，$AD = BD = r$ となる三角形 $ABD$ を作る．点 $D$ は，$C$ が移動した円の中心となる．なお，ベクトル $DO$ によって，2 点 $A$, $B$ を移動させると，$C$ に内接した線分が得られる．

次の練習問題は平行移動によって解ける．

**練習 27.**　与えられた三角形に，与えられたベクトルを内接させよ (つまり，そのベクトルに平行で長さが等しい線分で，その両端点がそれぞれその三角形の異なる辺上にあるものを作図せよ)．

**練習 28.**　台形の平行な 2 辺の長さと 2 つの対角線の長さがわかっているとき，どのようにしてその台形を作図すればよいか．

## §2.2　対称変換

**定義 5** $l$ を平面上の直線とする．$l$ に関する対称変換とは，平面上の任意の点 $A$ を $l$ が線分 $AA'$ の垂直二等分線となるような点 $A'$ にうつす平面変換である．この変換を軸 $l$ に関する線対称ともいい，$S_l$ と表す．

**問題 14** 2 点 $A$, $B$ が直線 $l$ に関して同じ領域にあるとする．このとき，折れ線 $AMB$ の長さが最小となる $l$ 上の点 $M$ を求めよ．‘現実の’ 問題で考えたいなら，からっぽなバケツをもつ人 $A$，火事 $B$，川 $l$ をイメージするとよい．

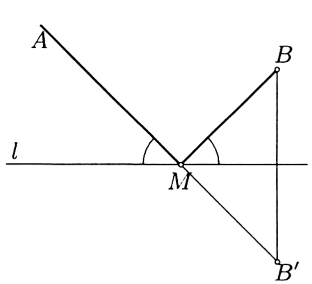



図 2.4　最短の道

**解答.** $A$ と $B$ が $l$ に関して異なる領域にあるなら，求める $M$ は直線 $AB$ と $l$ との交点である．問題をこの場合に帰着させる (図 2.4 参照). つまり図のように $B' = S_l(B)$ とする．このとき，$l$ 上のどこに $M$ をとっても，折れ線 $AMB$ と折れ線 $AMB'$ の長さは等しいから，求める $M$ は直線 $AB'$ と $l$ との交点である．

2線分 $AM$, $BM$ と直線 $l$ がなす2つの角は等しいことに注意しよう．これは良く知られている光学の法則である．

**練習 29.** $\angle XOY$ の内部に，2点 $A$, $B$ がある．このとき，折れ線 $AMNB$ の長さが最小となる2点 $M$, $N$ を求めよ．ただし，$M \in XO$, $N \in YO$ とする[1].

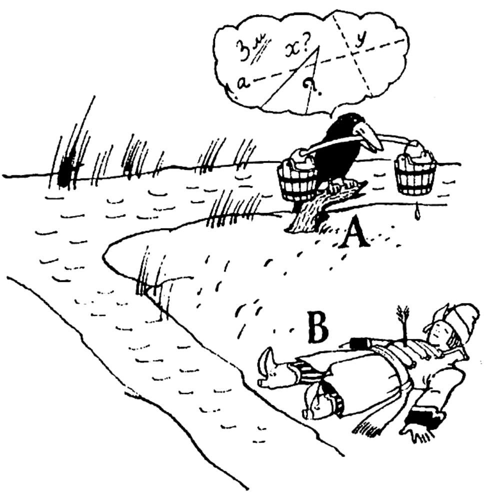



図 2.5 練習 29 の 2 つの川

次は短い道に関する最後の問題である．

[1] 図 2.5 の絵は，あるロシア民話の一場面である．点 $A$ にいる‘からす’は，点 $B$ にいる‘王子’に，できるだけ早く「死んだ水」と「生きた水」をかけなくてはならない．そうすれば，その王子は生き返るというのである．

**問題 15** 鋭角三角形 $ABC$ 内に内接する三角形で，周の長さが最小となるものを描け (図 2.6).

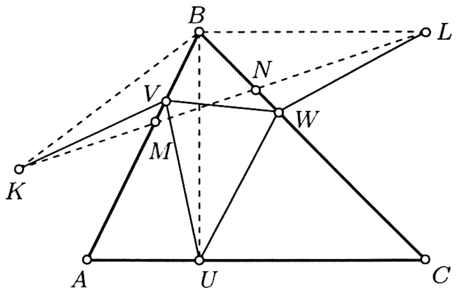



**図 2.6**　三角形に内接する三角形

**解答.** 図 2.6 のように，三角形 $ABC$ に内接した任意の三角形を $UVW$ とし，$K, L$ をそれぞれ直線 $AB$, $BC$ に関する点 $U$ の対称点とする．このとき，折れ線 $UVWU$ と折れ線 $KVWL$ の長さは等しい．とくに，$U$ を固定してこの長さを最小にするには，$KVWL$ が直線となるように 2 点 $V \in AB$, $W \in AC$ をえらべばよい．任意の $U \in AC$ に対して，直線 $KL$ と $BA$, $BC$ とが交わる点をそれぞれ $M, N$ とする．点 $U$ を動かして $\triangle UMN$ の周の長さが最小となるような点 $U$ をえらべば，求める三角形が得られるから，線分 $KL$ の長さが最小となる $U$ を求めなければならない．

$\triangle BKL$ は $BK = BU = BL$ となる二等辺三角形であることに注意しよう．$\angle KBL$ は $U$ の位置に依存しない．つまり $\angle KBL = 2\angle ABC$．したがって，辺 $KL$ の長さを最小にする $U$ の位置は $BK$ あるいは $BL$ (つまり $BU$) の長さが最小となる $AC$ 上の点となる．よって，求める $U$ は $BU \perp AC$ となる $AC$ 上の点である．

3 点 $U, V, W$ の対称性から，最小周の三角形 $UVW$ の他の 2 点 $V \in AB$, $W \in BC$ はそれぞれ，頂点 $C$, $A$ から対辺におろした垂線の足である．

**練習 30.** 三角形の1つの頂点とその3頂点の角の二等分線が与えられているとき，どのようにしてその三角形を作図すればよいか．

**練習 31.** 2つの鏡が 45° の角をなし，その角の内部に光線が入射したとする．何回かその鏡に反射したあと，その光線は最初の光線に平行な直線に沿ってその角からでていくことを証明せよ．また，45° の角以外に，同じような性質をもつ角は存在するか．

## §2.3 回転

**定義 6** $O$ を平面上の点とし，$\varphi$ を実数の角とする．$O$ の回りの角 $\varphi$ の回転とは，任意の点 $A$ を $|OA| = |OA'|$, $\angle AOA' = \varphi$ となるような点 $A'$ にうつす平面変換である．ただし，反時計回りを正の角とする．この変換を $R_O^\varphi$ と表す．

図 1.17 をみてみよう．$P$ を正六角形 $ABCDKE$ の中心とする．このとき，次の式が成り立つ．

$$A +_P B +_P C +_P D +_P K +_P E = P$$

このように，偶数個の頂点をもつ正多角形のすべての頂点を中心 $P$ を極として足すと, $P$ になる (点の和の定義に関しては，p.8 参照)．実際，頂点すべての集合 $\rho$ に対して互いに素な2点からなる $\rho$ の部分集合の族が存在し，それぞれの集合における2点の $P$ 上和は $P$ となるからである．奇数個の頂点をもつ正多角形に対して，同じ性質が成り立つかどうかを示すことは簡単ではない．すべてのベクトルの座標を直接計算しようとすると，かなり複雑な三角法による表現を扱わなければならないからである．しかし，これは平面全体を動かすことによって，簡単に示される．

**問題 16** 任意の正多角形に対して，$P$ をその正多角形の中心とする．このとき，その正多角形のすべての頂点を $P$ を極として足すと，$P$ になることを証明せよ．

**解答.** 頂点の個数を $n$ とする．点 $P$ の回りに $360°/n$ 回転すると，もとの正多角形になる．したがって，頂点の和も変わらない．しか

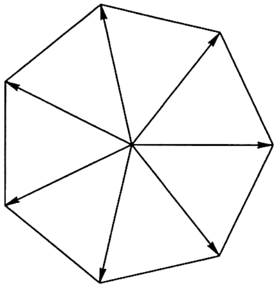


図 2.7 多角形の頂点の和

し，平面上の点で，そのような回転によって位置が変わらない点はただ 1 つしかない．それは回転の中心である．したがって，正多角形の頂点の $P$ 上和は $P$ である．

**練習 32.** 凸多角形内に点 $M$ がある．$M$ から，その多角形のすべての辺に垂線をおろし，そのおのおのの垂線上に，その対応する辺の長さと，$M$ からの距離が等しい点 $A_i$ をとる．このとき，$M$ を極としたこれらのすべての点の和は 0 であることを示せ．

**問題 17** 平面上の点 $D$ と長さ $a, b, c$ が与えられている．このとき，$AD = a$, $BD = b$, $CD = c$ となる正三角形 $ABC$ を求めよ (図 2.8)．

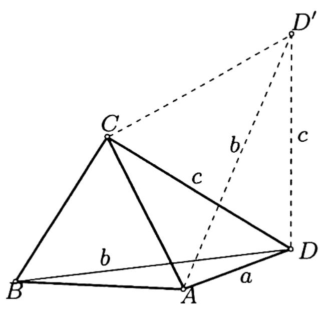



図 2.8 正三角形の構成

**解答.** 3 辺がわかれば，三角形は決まるが，図 2.8 の 3 本の線分 $a$, $b$, $c$ はそのままの場所では三角形を構成することはできない．そこで次のようにする．点 $C$ の回りに，平面を 60° 回転させる．そうすれば，$B$ は $A$ に移動し，$D$ は $D'$ に移動する．回転によって長さは変わらないから，$\triangle ADD'$ の辺の長さはそれぞれ $a$, $b$, $c$ である．まず，この三角形 $ADD'$ をつくり，次に，$\triangle CDD'$ が正三角形になるような点 $C$ をみつけ，最後に点 $B$ をみつければよい．

**練習 33.** 3 本の平行線が与えられたとき，それぞれの線上から 1 点ずつとり，その 3 点が正三角形の頂点となるようにせよ．

**問題 18** 三角形の内側に，その三角形の頂点からの距離の和が最小になる点を求めよ．

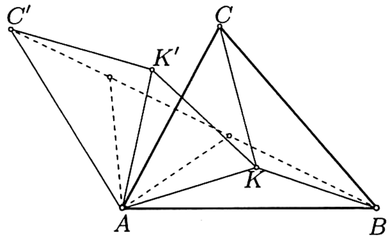



図 2.9 距離の和の最小

**解答.** 三角形 $ABC$ 内に任意の点 $K$ をとる．2 点 $C$, $K$ を，$A$ を中心として反時計回りに 60° 回転させる．$K$ が移動した点を $K'$, $C$ が移動した点を $C'$ とする (図 2.9 参照)．問題の 3 つの距離の和 $AK + BK + CK$ は，折れ線 $C'K'KB$ の長さに等しい．$K$ と $K'$ が直線 $BC'$ 上にあるとき，折れ線 $C'K'KB$ の長さは最小になる．よって，求める点は $\angle AK_0C' = 60°$(つまり $\angle AK_0B = 120°$) となる直線 $BC'$ 上の点 $K_0$ である．対称性より，$\angle BK_0C = \angle CK_0A = 120°$ である．

上の解法は，その角が 120° より小さい三角形に対してのみ成り立つ．そうではない場合は読者が証明してみよう．

**練習 34.** 正方形 $ABCD$ 内の任意の点を $M$ とする．このとき，点 $A$, $B$, $C$, $D$ を通り，それぞれ辺 $BM$, $CM$, $DM$, $AM$ に垂直であるような 4 本の直線を描け．また，このとき，これらの 4 本の直線が 1 点で交わることを示せ．

180° の回転を**裏返し**あるいは**点対称**という．点対称について述べる際，記号からしばしば 180° を省き，$R_A^{180°}$ の代わりに $R_A$ と書くことにする．これによって解ける 2 つの問題をあげておく．

**練習 35.** 2 円 $O, O'$ が 2 点で交わっているとする．この交点の 1 つを通り，$O$ と $O'$ で長さが等しい弦を切り取る直線を描け．

**練習 36.** 1 台の丸いテーブルと沢山の硬貨がある．2 人のプレイヤーが，交代でそのテーブルの上に硬貨を置く．ただし，硬貨は互いに重ならないように置かなければならない．先手のプレイヤーは，どうすれば勝てるだろうか．

## §2.4 複素変数関数

もう一度，問題 16 を考えよう (p.40 参照)．先の幾何学的な証明の他に，この問題には代数的な証明がある．まず，平面上に**複素構造**を導入しよう．複素数と平面上の点とを 1 対 1 対応させるのである．たとえば，その正多角形の中心を表す複素数を 0，頂点の 1 つを表す複素数を 1, 1 の反時計回り隣りの頂点を表す複素数を $\zeta$ とする．このとき，残りの頂点は $\zeta^2, \cdots, \zeta^{n-1}$ と表される．知りたいのは，$x = 1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{n-1}$ の値である．$\zeta^n = 1$ より，$x\zeta = \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{n-1} + 1 = x$ となり，$\zeta \neq 1$ だから，$x = 0$.

この代数的解法は，本質的にはいままでの幾何学的解法と同じである．もっと正確に言うと，ただ単に，幾何学的論理を代数的な言葉に翻訳しただけである．このことを説明しよう．上の代数的な証明は，等式 $\zeta x = x$ をみたす唯一の解が $x = 0$ であるという事実がメインである．では，複素数に $\zeta$ をかけることによって，幾何学的には何がおこるのだろうか？$|\zeta| = 1$ であるか

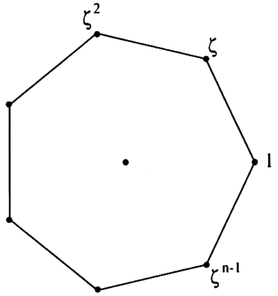



図 2.10　頂点が複素数の正多角形

ら，その絶対値は変わらない．偏角は，$360°/n$ だけ増える．したがって，幾何学的用語で言い換えると，複素数に $\zeta$ をかけるということは，その複素数を多角形の中心の回りに $360°/n$ 回転することである．

一般に，平面上の点を複素数とみなすならば，平面変換，とくに平面運動は**複素変数関数** $w = f(z)$ として考えられる．ただし，$z$ は平面上の任意の点，$w$ はその像である．たとえば，0 を中心とする角 $\varphi$ の回転は関数 $w = \alpha z$ $(|\alpha| = 1)$ で表される (このとき，$\alpha = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\varphi$ は回転角). 同じように，平行移動は，関数

$$w = z + a \tag{2.1}$$

で表される. ここで $a$ は複素数である.

さて，点 $p$ を中心とする回転の公式を導こう．図 2.11 は，点 $z$ の点 $p$ を中心とする角 $\varphi$ の回転を示している．これは，次の 3 つのステップに分けられる：

1. 移動 $z \mapsto z - p$
2. 原点の回りの回転 $z - p \mapsto \alpha(z - p)$
3. 逆移動 $\alpha(z - p) \mapsto \alpha(z - p) + p$

したがって，点 $p$ の回りの角 $\varphi$ の回転変換は，次の関数で与えられる．

$$w = \alpha z + (1 - \alpha)p, \ (\alpha = \cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{2.2}$$

平行移動と回転を**真の運動**という．その理由は，平行移動や回転を物理的

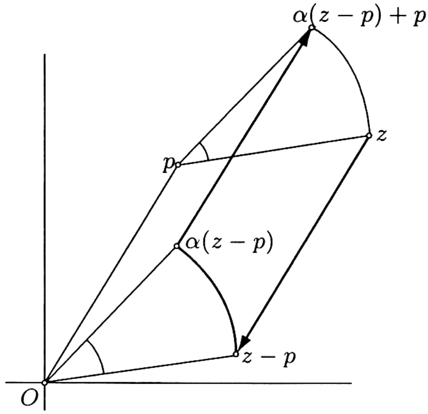



図 2.11　複素座標系の平面運動

におこすのに平面空間から離れる必要がないからである．それに反して，直線に関する対称変換は，周りの 3 次元空間のなかで平面を回転させ (裏返さ) ないと得られない．

**定理 3** 真の平面運動全体の集合は，次の複素変数関数によって表される平面運動全体の集合に集合として一致する．

$$w = \alpha z + m \tag{2.3}$$

ただし，$a$, $m$ は複素数，$|\alpha| = 1$.

**証明** (2.1), (2.2) より，任意の真の平面運動は線形関数 (2.3) で表されることがわかる．

その逆も成り立つ．すなわち

**『(2.3) で表される関数は真の平面運動である.』**

実際，$\alpha = 1$ ならば，方程式 (2.3) は方程式 (2.1) となり，平行移動を表す式となる．したがって，これは真の平面運動である．$\alpha \neq 1$ ならば，(2.3) は次のように書き換えられる．

$$w = \alpha z + m = \alpha(z - \frac{m}{1-\alpha}) + \frac{m}{1-\alpha}$$

この式は，点 $p = m/(1 - \alpha)$ を中心とする角 $\varphi$ の回転を表しているから，真の平面運動である．□

真でない平面運動 (たとえば，対称変換) に対する同様の表式を求めるためには，和や差以外の演算 —— **複素共役** —— が必要である．複素数 $z = x + iy$ の共役は，$\bar{z} = x - iy$ と定義される．幾何学的には，複素共役は，実軸に関する対称変換を表している (図 2.12)(p. 26 参照).

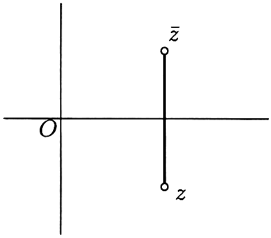



図 2.12　複素共役

**練習 37.** 直線 $y = kx + b$ に関する対称変換は次の等式で与えられることを証明せよ：

$$w = \bar{z} + 2bi \quad (k = 0 \text{ のとき}) \tag{2.4}$$

$$w = \frac{1 - k^2 + 2ki}{1 + k^2}\left(\bar{z} + \frac{b}{k}\right) - \frac{b}{k} \qquad (k \neq 0 \text{ のとき}) \tag{2.5}$$

(ヒント：$\frac{1-k^2+2ki}{1+k^2} = \alpha^2$ とおいてみよう．ただし，$\alpha = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\varphi$ は直線 $y = kx + b$ と $x$ 軸とのなす角である.)

複素数の計算を利用して解ける問題をあげておく．

**問題 19** 海賊が宝物を捜している．手紙によると，その宝物をみつけるためには，まず宝島にある 2 本の木 $A$, $B$ と，岩 $C$ をみつけなければならない (図 2.14)．点 $A$ を中心に点 $C$ を時計回りに 90° 回転させた点を $D$，点 $B$ を中心に点 $C$ を反時計回りに 90° 回転させた点を $E$ とし，線分 $DE$ の中点 $K$ に宝物が埋められているという．しかし，その海賊は，$A$ と $B$ をみつけたが，$C$ をみつけることができなかった．どのようにして，$K$ の場所を捜しだしたらよいか．




図 2.13　海賊

**解答.** 平面上に複素構造を導入する．すなわち，3 点 $A, B, C$ を表す複素数をそれぞれ $0, b, c$ とする (図 2.14)．このとき，(2.2) 式より，2 点 $D, E$ には, それぞれ複素数 $-ic$, $i(c-b)+b$ が対応する．よって，$K$ を表す複素数は $\dfrac{1-i}{2}b$ である．この表し方は文字 $c$ を含まないから，隠された場所は $c$ の場所に依存しないことがわかる．$K$ は $AB$ を斜線とする直角二等辺三角形の頂点である．

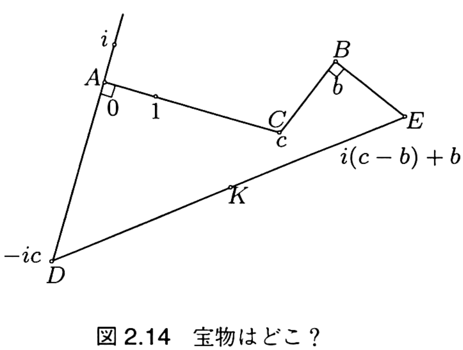



図 2.14　宝物はどこ？

**練習 38.** 三角形 $ABC$ の 2 辺 $AB, AC$ を，$A$ の回りにそれぞれ反対方向に $90°$ 回転させる．このとき，新しい 2 端点をむすぶ直線は，三角形 $ABC$ の $A$ を通る中線に垂直であることを証明せよ．

## §2.5 運動の合成

平面運動 $f, g$ が与えられているとする．このとき，まず $g$ を施し，次に $f$ を施した平面運動 $f \circ g$ を，$f$ と $g$ の合成または積という．

**定義 7** 平面運動 $f$ と $g$ の合成 $g \circ f$ は，すべての $x$ に対して

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

と定義される．

変換 $f \circ g$ は運動である．事実，$f \circ g$ は 2 点間の距離を変えない．この節では，運動の特別なタイプ —— 移動，対称変換，回転 —— の合成についてとりあげる．

**問題 20** $S_m \circ S_l$ を求めよ (図 2.11)．ただし，$S_l$, $S_m$ は，それぞれ直線 $l$, $m$ に関する対称変換とする．

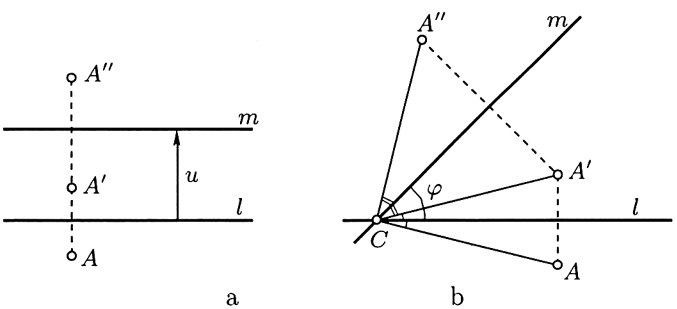



図 2.15　対称変換の積

**解答.** 平面上の任意の点 $A$ に対して，$A' = S_l(A)$, $A'' = S_m(A')$ とする．

$(i)$ $l \parallel m$ のとき (図 2.15)．このとき，3 点 $A, A', A''$ は一直線上にある．その直線は $l$ と $m$ に垂直で $A$ と $A'$ の距離は 2 直線 $l$ と $m$ との距離の 2 倍である．また，その距離は $A$ の位置に依存しない．よって，$S_l$ と $S_m$ の合成は，ベクトル $\mathbf{2u}$ による移動である．

$$S_m \circ S_l = T_{2\mathbf{u}} \tag{2.6}$$

ただし，$\mathbf{u}$ は $l$ と $m$ に垂直なベクトルで，$l$ から $m$ へ方向づけられ，その大きさは $l$ と $m$ との距離に等しい．

$(ii)$ $l \not\parallel m$ のとき (図 2.15)．$C$ を $l$ と $m$ の交点，$\varphi$ を $l$ と $m$ のなす角とすると，図から，$\angle ACA'' = 2\varphi$ であることがわかる．また，$|AC| = |A'C| = |A''C|$ に注意すると，次の式が導かれる．

$$S_m \circ S_l = R_C^{2\varphi} \tag{2.7}$$

ここで，$R_C^{2\varphi}$ は $C$ を中心とする角 $2\varphi$ の回転である ($\varphi < 0$ なら，時計回り，$\varphi > 0$ なら，反時計回りに回転させる)．

読者は，点 $A$ を図 2.15b とは異なる位置にとっても，(2.6) と (2.7) が成り立つことを確かめよ．

角 $\varphi$ は，$l$ から $m$ へ向かって計ることに注意しよう．たとえば，$\varphi = \pi/4$ のとき (2.7) 式は，$l$ が $C$ を中心として正の方向に (反時計回りに)45° 回転すると，$m$ に重なることを意味する．したがって，運動の合成 $S_m \circ S_l$ は合成の順序に依存する．詳しく言うと，$S_l \circ S_m$ は $S_m \circ S_l$ の逆の運動である．

**練習 39.** 3 直線 $l, m, n$ が 1 点で交わっている．このとき，運動 $(S_n \circ S_m \circ S_l)^2 = S_n \circ S_m \circ S_l \circ S_n \circ S_m \circ S_l$ は，どのような運動か (まず，平面の任意の点にその合成を施し予想をたててから，いままでの公式を用いて，その予想を証明するとよい)．

(2.6), (2.7) を右辺から左辺にみると，移動や回転を対称変換の積に分解する方法がわかる．この分解は一意的ではないので，問題によっては，うまい軸のとり方が証明を大いに助ける場合もある．

**問題 21** 2 つの回転の合成を式で表せ (図 2.16).

**解答.** ($i$) 2 つの回転の中心が一致するとき. $R_A^{\varphi}$, $R_A^{\psi}$ を, その 2 つの回転変換とすると, 次の式が成り立つ.

$$R_A^{\varphi} \circ R_A^{\psi} = R_A^{\varphi+\psi} \tag{2.8}$$

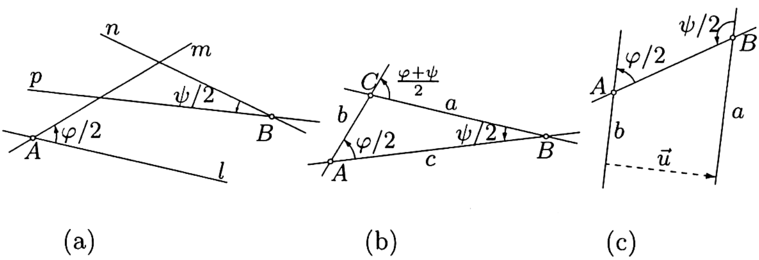



図 2.16　回転の積

($ii$) 2 つの回転の中心が異なるとき. $R_A^{\varphi}$, $R_B^{\psi}$ を, その 2 つの回転とすると, (2.7) より次の式が成り立つ. $R_A^{\varphi} = S_m \circ S_l$;　$R_B^{\psi} = S_p \circ S_n$. ここで, 2 直線 $l, m$ は点 $A$ で交わり, 角 $\varphi/2$ をなす. また, 2 直線 $n, p$ は点 $B$ で交わり, 角 $\psi/2$ をなす (図 2.16a 参照). ゆえに $R_A^{\varphi} \circ R_B^{\psi} = S_m \circ S_l \circ S_p \circ S_n$.

この式は $l = p$ のとき, $S_m \circ S_n$ と単純化できる. なぜなら, このとき, $S_l \circ S_p$ は**恒等変換**すなわち任意の点をそれ自身にうつす変換だからである.

さて, 改めて図 2.16b を考えてみよう. $c$ を $A$ と $B$ をむすぶ直線とする. このとき, $c$ を $A$ の回りに $\varphi/2$ 回転させると直線 $b$ と重なり, $c$ を $B$ の回りに $-\psi/2$ 回転させると直線 $a$ と重なる. $b \not\parallel a$ のとき. その交点を $C$ とすると, 次の式が成り立つ.

$$R_A^{\varphi} \circ R_B^{\psi} = S_b \circ S_c \circ S_c \circ S_a = S_b \circ S_a = R_C^{\varphi+\psi}$$

$\alpha = \varphi/2$, $\beta = \psi/2$, $\gamma = \pi - \alpha - \beta$ とおくと, この式は次のようになる.

$$R_A^{2\alpha} \circ R_B^{2\beta} = R_C^{-2\gamma} \tag{2.9}$$

(2.9) の両辺に右側から $R_C^{2\gamma}$ 倍すると，もっと対称的な形になる．

$$R_A^{2\alpha} \circ R_B^{2\beta} \circ R_C^{2\gamma} = \mathrm{id} \tag{2.10}$$

逆も成立する．すなわち，3 点 $A, B, C$ と角 $\alpha, \beta, \gamma$ ( $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 2\pi$) が (2.10) 式をみたすなら，角 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ は三角形 $ABC$ の頂点の角に等しい．

(2.10) 式は直接確かめられる．$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360°$ より，$R_A^{2\alpha} \circ R_B^{2\beta} \circ R_C^{2\gamma}$ は平行移動となる．$R_A^{2\alpha} \circ R_B^{2\beta} \circ R_C^{2\gamma}$ が恒等変換であることを示すためには，それが不動点をもつことを確かめればよい．しかし，図 2.17 によって，$A$ は連続する写像 $R_C^{2\gamma}, R_B^{2\beta}, R_A^{2\alpha}$ によって動かされないことがわかる．

$a \parallel b$ (つまり $\varphi + \psi$ が $2\pi$ の倍数) のとき

$$R_A^{2\alpha} \circ R_B^{2\beta} = T_{2\mathbf{u}} \tag{2.11}$$

となる．ただし，$\mathbf{u}$ は図 2.16c で定義されているベクトルである．

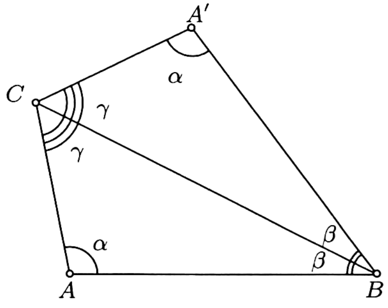



図 2.17　3 つの回転の合成

さて，今度は，複素数表示を用いて 2 つの回転の合成を表す式を導いてみよう．

複素平面上に複素数 $z$ をとる．$z$ に，回転 $R_B^{\psi}$ を施したあと，回転 $R_A^{\varphi}$ を施すことを式で表そう．それぞれの回転は (2.2) 式により次のように表さ

れる：

$$\begin{aligned} R_B^{\psi}(z) &= q(z-b)+b \\ R_A^{\varphi}(w) &= p(w-a)+a \end{aligned}$$

ただし，$p=\cos\varphi+i\sin\varphi$, $q=\cos\psi+i\sin\psi$.

$w$ の代わりに $R_B^{\psi}(z)$ を使うと，合成は

$$\begin{aligned} (R_A^{\varphi}\circ R_B^{\psi})(z) &= p(q(z-b)+b-a)+a \\ &= pq(z-\frac{a-pa+pb-pqb}{1-pq})+\frac{a-pa+pb-pqb}{1-pq} \end{aligned}$$

となる．$pq=\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)$ に注意すると，次の式が成り立つ．

$$R_A^{\varphi}\circ R_B^{\psi}=R_C^{\varphi+\psi}$$

ここで，$C$ は複素数

$$c=\frac{a-pa+pb-pqb}{1-pq} \tag{2.12}$$

に対応する点である．

このように，幾何学的な議論と代数的な議論は，2つの回転の合成に関して，2つの異なる式を導くことがわかる．(2.12) より，次の系が導かれる．

**『三角形 $ABC$ の2頂点 $A$, $B$ を表す複素数をそれぞれ $a$, $b$ とし，角 $A$, 角 $B$ の大きさをそれぞれ $\varphi/2$, $\psi/2$ とすると，頂点 $C$ を表す複素数は (2.12) から求められる．』**

さて，運動の合成とこれまでの公式を用いて，次の問題を解いてみよう．

**問題 22** 図2.18のように，三角形 $ABC$ の各辺に正三角形が描かれている．これらの3つの正三角形の中心を $M$, $N$, $P$ とするとき，三角形 $MNP$ は正三角形であることを証明せよ[2]．

**解答．** 三角形 $AMB$, $BNC$, $CPA$ を頂角 $120°$ の二等辺三角形とし，$F=R_P^{120°}\circ R_N^{120°}\circ R_M^{120°}$ とする．式 (2.9), (2.10) より $F$ は，回転

[2] この問題はナポレオンの問題として知られている．しかし，フランスの有名な将軍ナポレオンが，この問題をつくったわけではない．

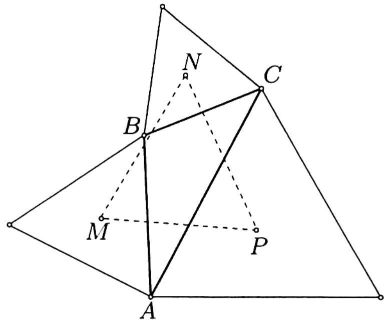



図 2.18　ナポレオンの問題

あるいは平行移動である．その回転角の和は 360° であるから，$F$ は平行移動でなければならない．ここで，点 $A$ が関数 $F$ によってどのように動くのかをたどってみると，$R_M^{120^\circ}(A) = B$, $R_N^{120^\circ}(B) = C$, $R_P^{120^\circ}(C) = A$ であることがわかる．ゆえに，$F(A) = A$．よって，$F$ はゼロベクトルによる移動，すなわち恒等変換である．

$$R_P^{120^\circ} \circ R_N^{120^\circ} \circ R_M^{120^\circ} = \mathrm{id}$$

この式と (2.10) を比較すると，結果として，三角形 $MNP$ は正三角形であることがわかる．

**練習 40.**　問題 22 を複素数表示を用いて解け．

**練習 41.**　1 つの四角形と，その 4 辺がそれぞれ正方形の一辺となるように 4 つの正方形が描かれている．このとき，それらの正方形の中心を適当にむすぶと，両対角線が互いに垂直で長さが等しくなることを示せ．

**練習 42.**　次の 2 つの変換の合成を求めよ．
1) 2 つの点対称．
2) 1 つの点対称と 1 つの線対称．

**練習 43.**　五角形のすべての辺の中点が与えられているとき，その五角形を構成する方法を述べよ．

## §2.6　映進

これまで，移動，回転，対称変換という 3 種類の運動をみてきた．けれども，これら 3 種類以外の平面運動が存在する．たとえば，練習 42 のような線対称と点対称の積は，これら 3 種類のどれにも属さない．

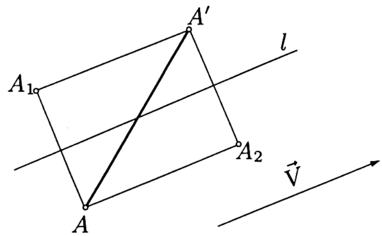



図 2.19　映進

**定義 8** $v$ を直線 $l$ に平行なベクトルとする．このとき，**軸** $l$ **と** $v$ **に関する映進**とは，対称変換 $S_l$ と移動 $T_v$ の合成である (図 2.19 参照).

この映進を $U_l^v$ と表すと，等式 $U_l^v = T_v \circ S_l = S_l \circ T_v$ が成り立つ．なぜならば，図 2.15 の四角形 $AA_1A'A_2$ は，つねに長方形だからである．他の平面運動と同様に，映進は幾何学的な問題を解くのに大変有効である．

**問題 23** 三角形 $ABC$ が与えられている．このとき，$AD = BE$, $AC \parallel DE$ となる辺 $AB$ 上の点 $D$ と辺 $BC$ 上の点 $E$ を求め，2 点 $D, E$ を通る直線を描け．

**解答.** この答えは，映進の次の 2 つの性質が鍵になる．この性質は図 2.19 をみるとすぐわかるだろう：

1. 任意の点とその点の映進による像とをむすぶ線分の中点は，つねにその映進の軸上にある．
2. 映進の軸は，その映進の運動によって動かされない．

半直線 $AB$ を半直線 $BC$ にうつす映進 $U$ がある．その対称軸は，直線 $NK$ である．ただし，$N$ は，線分 $AB$ の中点で，$K$ は

$NB = BK$ となる線分 $BC$ 上の点である．仮定より，$AD = BE$ である．ゆえに，$U(D) = E$．また，$DE$ の中点は直線 $NK$ 上になければならない．しかし，$DE \parallel AC$ より，$DE$ の中点は，中線 $BM$ 上にあることになる．よって，3 線分 $DE, BM, NK$ は 1 点で交わる．このように，2 点 $D, E$ を通る直線は，次の順序で描ける．まず，先に述べた 2 点 $N, K$ を探す．次に，中線 $BM$ を描く．最後に，$BM$ と $NK$ の交点を通り，線分 $AC$ に平行な直線を描く．これが求める直線である．

**練習 44.** 点 $A$ と 3 直線 $l, m, n$ が与えられている．このとき，$A$ を通る直線 $k$ で，次をみたすものを描け：$S_l \circ S_m \circ S_n(k) \parallel k$.

**練習 45.** 複素数を用いて，映進を表す式を求めよ．

## §2.7 運動の分類

前節で新しい種類の平面運動が紹介されたので，結局いままでに 4 種類の平面運動があることがわかった．ここで，おのずと次のような問題がおこってくる．「いままでにでてきた 4 種類の平面運動以外の平面運動は存在するか？」これは次の定理によって答えられる．

**定理 4** 任意の平面運動は，移動，回転，対称変換，映進のうちのどれかである．

**証明** まず第一に，平面運動は独立な 3 点 $A, B, C$ の像によって完全に定義されることに注意しよう．実際，3 点 $A', B', C'$ がそれぞれ $A, B, C$ の像であるならば，任意の点 $D$ に対して，ただ 1 つの点 $D'$ が存在して，$A', B', C'$ から点 $D'$ への距離がそれぞれ $A, B, C$ から $D$ への距離と等しくなるからである．

第二に，任意の 2 点 $M, M'$ に対して，$M$ を $M'$ にうつす対称変換があることに注意しよう．実際，この対称変換は一意的に定義される．すなわちそれは対称軸が線分 $MM'$ の垂直二等分線である対称変換である．

以上 2 つの注意点から，次のことがわかる．

**『任意の平面運動は，対称変換の積で表される．』**(問題 21 参照)

実際，$f$ を任意の平面運動，$A, B, C$ を平面上の独立な 3 点，$f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$, $A' \neq A$ とする．また，$A$ を $A'$ にうつす対称変換を $S_l$ とし，$B_1 = S_l(B), C_1 = S_l(C)$ とする (図 2.20)．このとき，$B_1 \neq B'$ であるならば，$B_1$ を $B'$ にうつす対称変換を $S_m$ とすると，$S_m(A') = A'$, $C_2 = S_m(C_1)$ である．最後に，もし $C_2 \neq C'$ ならば，$C_2$ を $C'$ にうつす三番目の対称変換 $S_n$ を求める．このような最悪の場合，つまりこのような手順のすべてが必要なとき，$f$ は $S_n \circ S_m \circ S_l$ と表される．もしいくつかのステップが不必要なら，$f$ は 1 つの対称変換，あるいは 2 つの対称変換の合成として表される．

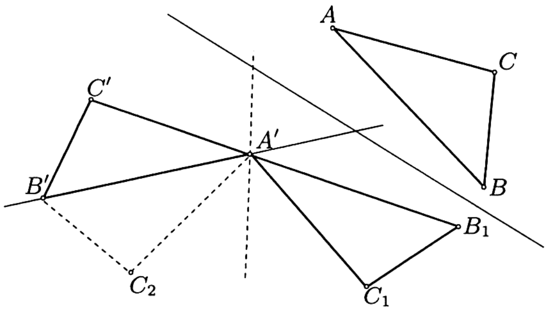



図 2.20　平面運動の対称変換への分解

さて，3 つ以下の対称変換の積が，いままでにでてきた 4 種類の平面運動のうちの 1 つであることを証明しよう．実際，1 つの対称変換は対称変換である．2 つの対称変換の積は，回転あるいは移動である．唯一の明らかでない場合は，3 つの対称変換の積 $S_n \circ S_m \circ S_l$ である．

平面上の 3 直線の位置関係は，図 2.21 の 4 つの異なるパターンのうちのどれかになる．(a) と (b) の場合，$S_n \circ S_m \circ S_l$ は対称変換であり，(c) と (d) の場合，$S_n \circ S_m \circ S_l$ は映進であることを示そう．

(a) の場合．$S_m \circ S_l$ は，$m$ と $l$ のなす角の 2 倍角の回転である．$l'$ を，$S_m \circ S_l = S_n \circ S_{l'}$, $l' \neq l, l' \neq m$ をみたし，しかも $l$ と $m$ の交点を通る直線とすると，次の式が成り立つ．

$$S_n \circ S_m \circ S_l = S_n \circ S_n \circ S_{l'} = S_{l'}$$

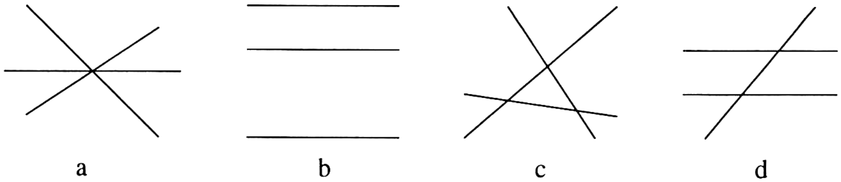



図 2.21　平面上の 3 直線

(b) の場合．(a) と同様な議論が成り立つ．

(c) の場合．3 つの対称変換の積を 2 つの対称変換の積におきかえる．まず，$S_m \circ S_l$ を同値な積 $S_{m'} \circ S_{l'}$ でおきかえると，$S_n \circ S_m \circ S_l = S_n \circ S_{m'} \circ S_{l'}$ である．ただし，$m' \perp n$(図 2.22)．同様に，積 $S_n \circ S_{m'}$ を $S_{n'} \circ S_{m''}$ でおきかえると

$$f = S_n \circ S_m \circ S_l = S_n \circ S_{m'} \circ S_{l'} = S_{n'} \circ S_{m''} \circ S_{l'}.$$

ただし，$n' \perp l'$．$l' \parallel m''$ より，$S_{m''} \circ S_{l'}$ は $n'$ 方向への平行移動である．よって，$f$ は映進である．

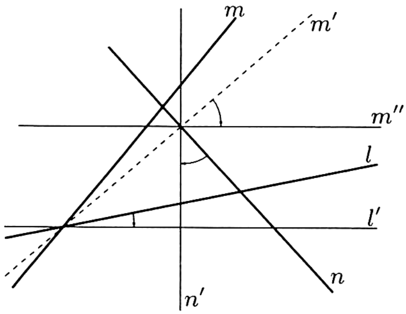



図 2.22　2 つの回転を施す

最後に，$(d)$ は $(c)$ の場合に帰着される．なぜなら，もし 3 直線のうちの 2 直線 ($n$ と $m$ または $m$ と $l$) が同じ角で回転しても，合成 $S_n \circ S_m \circ S_l$ は変化しないからである．□

平面運動は複素数で簡単に表される．定理 3 より，平行移動と回転は関数 $\alpha z + m$ ($|\alpha| = 1$) で表される．

**定理 5** 平面の対称変換と映進全体の集合は

$$w = \alpha\bar{z} + m \tag{2.13}$$

によって表される平面運動全体の集合に等しい．ただし，$\alpha$, $m$ は複素数，$|\alpha| = 1$.

**証明** 練習 37，練習 45 から，対称変換と映進は (2.13) 式で表されることがわかる．

一方，平面運動 (2.13) が，対称変換または映進を表すことを証明するにあたっては，(2.13) と標準的な対称変換 $z \mapsto \bar{z}$ との合成が $z \mapsto \alpha z + m$ となることに注意しよう．これは，定理 3 より，平行移動か回転のどちらかになる． □

## §2.8 方向

これまで 4 種類の平面運動 —— 移動，回転，対称変換，映進 —— をみてきた．最初の 2 つは，偶数個 (2 個) の対称変換の積として表される．これを**真の平面運動**という．残りの 2 つは，奇数個 (1 個，または 3 個) の対称変換の積として表される．これを**真でない平面運動**という．なぜならば，このような真でない平面運動を物理的に実行するためには，平面空間から脱出しなければならないからである (3 次元空間で平面を裏返さなければならない).

この 2 種類の平面運動は，**方向**の概念によって区別できる．

順序づけられた独立な 3 点 $A$, $B$, $C$ は，この順序が三角形 $ABC$ を反時計回りにまわるとき，**正に方向づけられている**という．また，その順序が三角形 $ABC$ を時計回りにまわるとき，その 3 点は**負に方向づけられている**という．

**練習 46.** 3 つのアイスホッケー用の円盤が，平面上で三角形を形成している．ホッケー選手が，1 つの円盤をえらび，残りの 2 つの円盤の間を通過するようにまっすぐスティックで打つ．25 回打ったあと，3 つの円盤はすべてもとの位置にもどることができるか．

どのような平面運動 $f$ も平面上のどのような 3 点もすべて方向を変えないか，あるいはすべて方向を逆にするかのどちらかであることは注目すべきことである．つまり，平面上の任意の 3 点 $A$, $B$, $C$ に対して，$f(A)$, $f(B)$,




図 2.23 3 つの円盤

$f(C)$ の方向は，$A, B, C$ の方向と同じであるか —— または逆方向であるかのどちらかである．

とくに，容易にわかるように，真の運動 (移動，回転) は方向を保存する運動で，真でない運動 (対称変換，回転) は方向を逆にする運動である．

したがって，**奇数個の対称変換の合成は恒等変換ではない**ことがわかる．

方向の概念は，複素数表示によって表すことができる．

**練習 47.** 3 つの複素数の組 $(z_1, z_2, z_3)$ が，正に方向づけられるための必要十分条件は，$0 \leq \arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \leq \pi$ が成り立つことであることを示せ．

## §2.9 対合の計算

**定義 9** 変換 $f$ は，2 つの等式

$$f \neq \mathrm{id}, \quad f^2 = f \circ f = \mathrm{id}$$

をみたすとき，**対合**といわれる．二番目の等式は，条件

$$f = f^{-1}$$

と同値である．すなわち，$f(A) = B$ が成り立つための必要十分条件は，

$f(B) = A$ が成り立つことである.

平面運動には，次の 2 種類の対合がある.

- $R_A$ ── 点 $A$ の回りの $180°$ 回転 (§2.3 参照).
- $S_l$ ── 直線 $l$ に関する対称変換 (§2.2 参照).

対合の運動は，2 種類の幾何学的な対象 ── 点と線 ── に対応する．この対応は実際，1 対 1 対応である．なぜなら，異なる点および異なる直線は，異なる対合を生成するからである．したがって，幾何学的な対象から対合への移行は，すべての情報を保存し，点と線についてのすべての事実は，対応する対合の言葉にいいかえられる.

**問題 24** 直線 $l$ と直線 $m$ が垂直であることに同値な性質を，*2* つの対称変換 $S_l$, $S_m$ の組の性質として述べよ.

**解答.** $S_m \circ S_l$ は，$l \parallel m$ のとき移動となり，$l$ と $m$ のなす角が $\varphi$ であるとき角 $2\varphi$ の回転となる．よって，$m = l$ でない限り，合成変換 $S_m \circ S_l$ は，決して恒等変換にはならない．$(S_m \circ S_l)^2$ は (前者の場合) 移動あるいは (後者の場合) $4\varphi$ の回転である．したがって，2 直線 $l, m$ が垂直であるための必要十分条件は

$$(S_m \circ S_l)^2 = \mathrm{id} \tag{2.14}$$

である．よって，$S_m \circ S_l$ は対合である．この対合は，この与えられた 2 直線の交点の回りの裏返しであることに注意しよう．等式 (2.14) の両辺に左から $S_m$，右から $S_l$ を施すと，次の等式が得られる.

$$S_m \circ S_l = S_l \circ S_m \tag{2.15}$$

すなわち，対合 $S_m$ と対合 $S_l$ は**交換可能**である．これが求める必要十分条件である.

ここで，可換性と結合法則について述べよう．一般に，運動の合成は可換であるとは限らない．いまみたように，2 つの異なる対称変換が可換であるた

めの必要十分条件は，その2つの対称軸が垂直であることである．一方，運動の合成に関しては，次のことが成り立つ．

『**変換の合成と同様に，運動の合成に関して結合法則がみたされる．**』

実際，集合 $V, W, X, Y$ と写像 $f, g, h$ が，次のように与えられているとする．

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} X \xrightarrow{h} Y$$

このとき，次の合成をつくることができる：$g \circ f : V \to X$, $h \circ g : W \to Y$, $h \circ (g \circ f) : V \to Y$, $(h \circ g) \circ f : V \to Y$.

結合法則がみたされるということは，$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ が成り立つことを意味する．

このほとんど明らかな性質をきちんと証明するためには，合成の意味 (定義) を理解すれば十分である．たとえば，ここで，写像 $g \circ f$ は，任意の元 $v \in V$ で，$(g \circ f)(v) = g(f(v))$ と定義されているから，次の式が成り立つ．

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(v) &= h((g \circ f)(v)) = h(g(f(v))) \\ &= (h \circ g)(f(v)) = ((h \circ g) \circ f)(v) \qquad (2.16)\end{aligned}$$

よって，任意の元において，$h \circ (g \circ f)$ と $(h \circ g) \circ f$ の値は等しい．ゆえに，$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

結合法則がよく理解できる例をあげよう．

$f, g, h$ がそれぞれくつ下，ブーツ[3]，オーバーシューズをはく動作であるとする．このとき，$(h \circ g) \circ f$ は，まずくつ下をはき，それからオーバーシューズの内側にブーツを入れたものをくつ下をはいた足に身につける動作を意味する．一方，$h \circ (g \circ f)$ は，まずくつ下を入れたブーツをはいて，それからそのブーツの上にオーバーシューズをはく動作である．明らかにこの2つの結果は同じである！

このような動作の合成は必ずしも可換ではない．たとえば，くつ下をはいてブーツをはく動作は，ブーツをはいてくつ下をはく動作と結果として同じではない (可換ではない)．しかし，交換可能な (可換な) 動作も存在する．た

[3] ここではロシアの伝統的な防寒用長靴，ヴァレンキをさす．暖かいが防水ではないので，雪の上を歩くときにはゴム製のオーバーシューズ（ガロッシュ）が必要となる．ロシアでは現在でも高齢者（とくに山間部）に利用者が見られる．

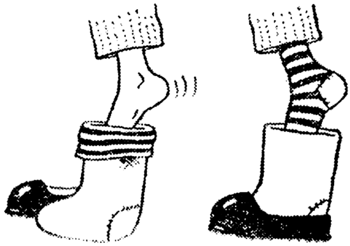


図 2.24　結合法則

とえば，1 つの足にくつ下をはくことと，もう片方の足にくつ下をはくことである．

同じように，いくつかの合成の逆操作も考えられる．たとえば，くつ下をはき，それからブーツ，それからオーバーシューズをはくという一連の動作の逆の動作は，オーバーシューズを脱ぎ，それからブーツ，それからくつ下を脱ぐ動作になる．したがって，次の式が成り立つ．

$$(h \circ g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \circ h^{-1}.$$

それでは，具体的に対合の計算をしてみよう．

**問題 25**　4 点 $A, B, C, D$ が平行四辺形を形成するための条件を，対合を用いて表せ．

**解答.** 練習 42 より，$R_A \circ R_B = T_{2\overrightarrow{BA}}$, $R_D \circ R_C = T_{2\overrightarrow{CD}}$ である．四角形 $ABCD$ (この順で頂点をもつ) が，平行四辺形であるための必要十分条件は，$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ であるから，このことは，次の条件と同値である．

$$R_A \circ R_B = R_D \circ R_C$$

この式は，$R_A \circ R_B \circ R_C \circ R_D = \mathrm{id}$ または

$$R_A \circ R_B \circ R_C = R_D \tag{2.17}$$

と書き直される．(2.17) 式は，与えられた 3 頂点から，平行四辺形の残りの頂点を求める式とみなすこともできる．

**練習 48.**　次の幾何学的な事実を，対応する対合間の代数的な関係式で表せ：

(*a*) 点 $A$ は直線 $l$ 上にある.　(*b*) 点 $A$ は線分 $BC$ の中点である.

**練習 49.**　次の関係式の幾何学的な意味を述べよ：

(*a*)　$R_A \circ S_l = S_l \circ R_B$　(*b*)　$(S_n \circ S_m \circ S_l)^2 = \mathrm{id}$

対合の式を使うと，平面上の点と線についての情報を簡潔に表せることがある．例をあげよう．

**問題 26**　図 2.25 のように，四角形 $ABCD$ と，その 4 辺をそれぞれ一辺とする 4 つの正方形が描かれているとする．ただし，図の $M$, $N$, $P$, $Q$ は，それぞれ対応する正方形の中心である．このとき，四角形 $MNPQ$ が正方形になるための四角形 $ABCD$ の条件を述べよ．

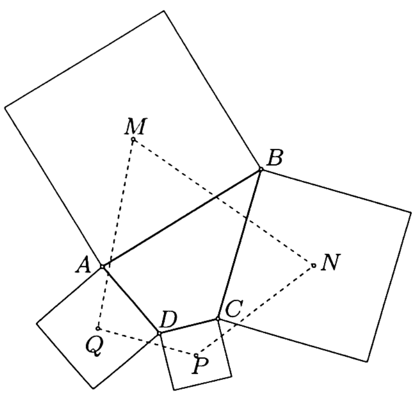



**図 2.25**　四辺形の 1 辺を 1 辺とする正方形

**解答.** 四角形 $MNPQ$ の 2 つの対角線が，互いに垂直であることはすでに示した (練習 41 参照)．したがって，四角形 $MNPQ$ が正方形になるための必要十分条件は，四角形 $MNPQ$ が平行四辺

形であることである．問題 25 より，この条件を次のように 4 つの対合に関する条件として書くことができる．

$$R_M \circ R_N \circ R_P \circ R_Q = \mathrm{id} \tag{2.18}$$

(2.9) 式より次が成り立つ．

$$\begin{aligned} R_M &= R_A^d \circ R_B^d \\ R_N &= R_B^d \circ R_C^d \\ R_P &= R_C^d \circ R_D^d \\ R_Q &= R_D^d \circ R_A^d \end{aligned}$$

ただし，$d = 90°$ とする．また，$R_M$ のように，回転角が記されていない回転は 180° 回転とする．これらの式を (2.18) に代入すると

$$R_A^d \circ R_B \circ R_C \circ R_D \circ R_A^d = \mathrm{id} \tag{2.19}$$

となる．この式の両辺に左と右からそれぞれ $R_A^{-d}$ をかけると，次のようになる．

$$R_B \circ R_C \circ R_D = R_A$$

(2.17) より，この式は四角形 $ABCD$ が平行四辺形であることを表している．よって，四角形 $MNPQ$ が正方形になるための必要十分条件は，四角形 $ABCD$ が平行四辺形であることである．

# 第3章
# 変換群

群の概念は，2 つの異なる考え方 —— 幾何学的な考え方と代数的な考え方 —— を合わせもつ.

幾何学的な面で**変換群**は対称性の法則を数学的に表現する．すなわち，与えられた対象を変えない変換が多くあればある程，その与えられた対象は対称的なのである.

代数的な面で**抽象群**は数学にお馴染みの演算の共通の特徴である．このような演算の例 —— 数や点の足し算やかけ算，ベクトルの足し算，移動の合成 —— は第 1 章，第 2 章で考察された.

## §3.1 平面をころがる三角形

変換群がよくわかる問題から始めよう.

**問題 27** 平面に正三角形 $ABC$ がある．正三角形 $ABC$ を，一辺を固定して，180° パタッとひっくりかえす．このような操作を何回か行った結果，正三角形 $ABC$ がもとの位置にもどったならば，そのとき，3 頂点 $A$，$B$，$C$ は，それぞれ同じ位置にもどっていることを証明せよ.

**解答.** 正三角形 $ABC$ の一辺を固定して，180° ひっくりかえす操作を，どのように辺をえらび，どのような回数施したとしても，辺 $a = BC$，$b = AC$，$c = AB$ は図 3.1a の網状組織のなかの線分にうつる.

このような変換は，これらの直線に関する対称変換の合成である．$G$ をこのような変換すべての集合としよう．$G$ の元は，たとえば，

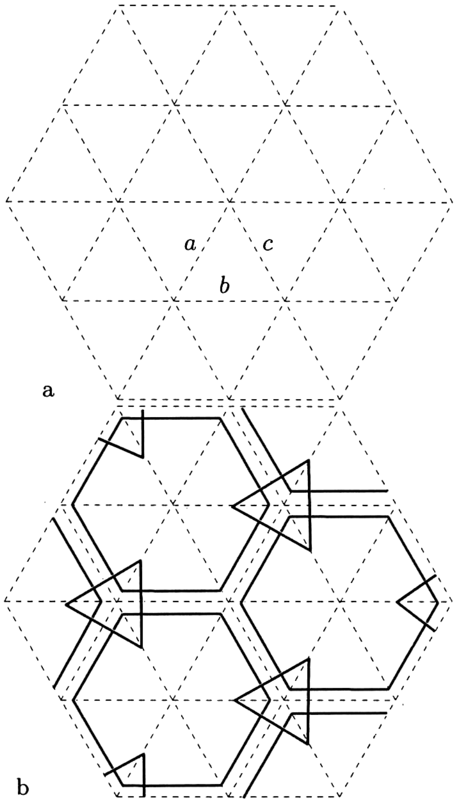



図 3.1　ころがる三角形の敷き詰め模様

頂点を中心とする 120° の回転や，正三角形の中線を対称軸とする映進などである．

この問題は，$G$ に属する平面運動で，三角形 $ABC$ を三角形 $ABC$ にうつすものが，恒等変換のみであることを証明すればよい．恒等変換以外で，三角形 $ABC$ を三角形 $ABC$ にうつす平面運動には次の 5 種類がある．三角形の中心の回りの 2 つの自明でない回転と，三角形の中線に関する 3 つの対称変換である．このどれも，$G$ に属さないことを示さなければならない．

読者のなかにはこれまでに，良い例や反例を作ることによって問題

を解決したことがあるだろう．ここでも同じ方法をとる —— しかし，作りたい例は次のような変わったものである．すなわち，次の 2 つの性質をもつ模様である．この模様を**敷き詰め模様**という：

1. 図 3.1a に示される任意の直線に関して対称である．
2. 三角形 $ABC$ の中線に関して**対称的**でなく，かつ，三角形の重心を中心とする回転に関しても**対称的**でない．

1 の性質は，その敷き詰め模様が $G$ に属するどのような運動によっても変わらないことを意味する．2 の性質は，$G$ がその三角形の 5 つの自明でない運動をどれも含まないことを意味する．

上のような 2 つの性質がある敷き詰め模様を作らなければならない．適切な例として，図 3.1b でみられるような昔の中国の敷き詰め模様 (格子細工) がある．もちろん，このような例は一意的ではない．このような例をつくる一般的なレシピは，次のように述べられる．

まず，三角形 $ABC$ 内に**完全非対称**の模様を描く．これは，三角形 $ABC$ の自明でない運動によって形が変わる模様である．次に，その三角形の辺に関する対称変換を連続的に施すことによって，三角形 $ABC$ とともに，この模様も一緒に動かしてみる．そして最後に，そのようなすべての図形の和をとる．このような作り方は，三角形 $ABC$ の内部にある模様が色で染められていて，三角形が回転すると，色で跡を残すのをイメージするとよくわかるだろう．

**練習 50.** 問題 27 の 3 点 $A$，$B$，$C$ を $A(0,0)$，$B(6,0)$，$C(0,6)$ となるように，平面上に座標系を導入せよ (p.18 の定義 3 参照)(三角形 $ABC$ は問題 27 と同様に，正三角形である)．三角形 $ABC$ 内の模様として，点 $K(3,1)$ をとるとする．このとき，この模様から，結果としてできる敷き詰め模様を描け．また，そのような点すべての座標を求めよ．

**練習 51.** 問題 27 の主張は，正三角形 $ABC$ を次の 3 つの大きさの角をもつ三角形におきかえても成立するか：

$(a)$ $45°, 45°, 90°$

(b) 30°, 60°, 90°

(c) 30°, 30°, 120°

## §3.2　変換群

**定義 10** 変換群とは，変換の集合 $G$ で次の2つの性質をみたすものである：

1. 2つの変換 $f$, $g$ が $G$ に属するならば，合成 $f \circ g$ も $G$ に属する．

2. 任意の変換 $f \in G$ に対して，逆変換 $f^{-1}$ は $G$ の元である．

この2つの性質は，$G$ の元どうしが相互に関係づけられていることを意味する．その全体はその合成のもとで閉じている．また，逆変換も元としてもつ．演算で閉じた集合の概念は，問題1をはじめ，何回かこれまでにでてきたことを思いおこそう．

**例 1.** 問題27の解答における変換の集合 $G$ は変換群である．性質1は，問題27を解くのに重要である．性質1は作り方から明らかである．性質2もまた，対称変換の列の逆変換は，逆の順番で施される同様の対称変換の列だから明らかである．

**例 2.** 与えられた集合 $M$ の変換全体の集合は，変換群をなす．これを $\mathrm{Tr}(M)$ と表す．

**練習 52.** 任意の変換群は恒等変換を含むことを証明せよ．

問題27の議論では，$G$ の他に $\mathcal{M}$ (平面運動全体の群) と $D_3$ (正三角形の対称群) を扱った．

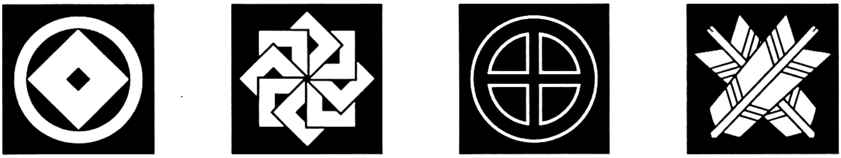
$G$ と $D_3$ はどちらも $\mathcal{M}$ に含まれている．このことを，$G$ と $D_3$ は $\mathcal{M}$ の**部分群**であるという．一般に，平面図形 $\Phi$ が与えられたとき，$\Phi$ を $\Phi$ にうつす平面運動全体の集合を考えることができる．この集合を，図形 $\Phi$ の**対称群**または**運動群**といい，$\mathrm{Sym}(\Phi)$ と表す．$\mathrm{Sym}(\Phi)$ の任意の元は，図形 $\Phi$ の**対称**といわれる． たとえば，$D_3$ は正三角形の対称群であるから，$\mathrm{Sym}(\text{正三角形}) = D_3$ である．

問題 27 の $G$ もまた，ある図形(図 3.1b で描かれた模様) の対称群である．このことを確かめるためには，この模様を変えない任意の運動が，この三角格子の直線に関する対称変換のいくつかの合成であることを確認するだけでよい．

**練習 53.** このことを確かめよ．

対称群によって，変換群の多数の興味ある例を作ることができる．いくつかの例を考えてみよう．

**問題 28** 図 3.2 は日本の家紋である．それらのおのおのの対称群を求めよ．また，同じものはどれとどれか．



$\Phi_1$ $\Phi_2$ $\Phi_3$ $\Phi_4$

図 3.2 家紋その 1

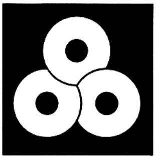
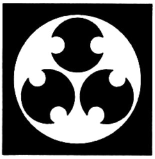
**解答.** $\Phi_1$ は，45° の角をなす 4 本の軸に関して線対称であり，90°，180°，270° 回転によって変化しない．また，任意の変換群と同様に，$\mathrm{Sym}(\Phi_1)$ は恒等変換を含む．したがって，その元の総数は 8 である．

$\mathrm{Sym}(\Phi_2)$ も 8 個の元からなる．しかし，$\mathrm{Sym}(\Phi_1)$ とは異なる．なぜならば，$\mathrm{Sym}(\Phi_2)$ の任意の元は回転だからである．

$\Phi_3$ と $\Phi_1$ の対称群は同じである．すなわち，どちらの群も恒等変換を含む 4 つの対称変換と 4 つの回転で構成される．

$\Phi_4$ には自明な変換しか含まれない．したがって，対称群 $\mathrm{Sym}(\Phi_4)$ はただ 1 つの元 —— 恒等変換 —— で構成される．

**練習 54.** 図 3.3, a～d の対称群を求めよ．更に，a～d を互いに比較せよ．また，a～d を問題 28 の群とも比較せよ．



*a*　*b*　*c*　*d*

図 3.3　家紋その 2

## §3.3　有限変換群の分類

図 3.2 と図 3.3 の図形の対称群は，いくつかの回転で構成されているか，あるいはいくつかの回転と，その回転と同数の (恒等写像を含む) 対称変換で構成されている．このことを一般化して，定理にすることができる．その定理を述べる前に，いくつかの用語を説明しよう．

変換群が有限個の元で構成されているとき，**有限**であるという．図 3.2 と図 3.3 の対称群はすべて有限である．無限個の元からなる群は**無限群**という．平面運動全体の群 $\mathcal{M}$ と問題 27 の群 $G$ は無限である．

群の**位数**とは，その群が含む元の個数である．有限群は有限位数の群である．

ある 1 点を中心とする $360°/n$ の整数倍回転で構成される群を**位数** $n$ **の巡回群**といい，$C_n$ と表す．$C_n$ のすべての回転と $n$ 個の対称変換で構成される群を **位数** $2n$ **の二面体群**といい，$D_n$ と表す．ただし，$D_n$ の対称変換の $n$ 本の対称軸はすべて回転の中心を通り，隣どうしの 2 本は $180°/n$ の角をなすものとする．

たとえば，図 3.2 と図 3.3 の 8 つの図の対称群は，左からそれぞれ $D_4$，$C_8$，$D_4$，$C_1$，$C_3$，$D_3$，$D_1$，$C_2$ である．

**定理 6** 平面運動の任意の有限群は $C_n$ または $D_n$ のどちらかである．

**証明**　この定理を証明するにあたって，まず次のことを理解しておこう．

**『有限群は平行移動を含まない．』**

実際，有限群がベクトル $\mathbf{a}$ による平行移動を含むとすると，その有限群は，倍数のベクトル $n\mathbf{a}$ による無限個の平行移動も含まなければならない．これは矛盾である．

**『有限群は映進を含まない．』**

実際，有限群に映進が含まれるとすると，その有限群にはその映進の2乗も含まれなければならない．しかし，映進の2乗は平行移動であるから，その群は有限群ではありえないことになる．これは矛盾である．

結論として，**任意の平面運動の有限群は，回転と対称変換だけで構成される**ことがわかる．

有限群に属する回転の中心はすべて等しい．なぜならば，次の練習問題からわかるように，異なる点を中心とする2つの回転を元として含む群は，平行移動を元としてもってしまうからである．

**練習 55.**　$A$，$B$ を平面上の異なる2点とし，$\varphi$，$\psi$ を $360°$ の倍数でない角とするとき，$R_B^{-\psi} \circ R_A^{-\varphi} \circ R_B^{\psi} \circ R_A^{\varphi}$ は，自明でない移動であることを証明せよ．

与えられた有限群に属するすべての回転を $R_A^0$，$R_A^{\varphi}, \ldots$，$R_A^{\omega}$ $(0 < \varphi, \cdots, \omega < 360°)$ とし，これらの角 $\varphi, \ldots, \omega$ の最小値を $\psi$ とする．このとき，すべての角は $\psi$ の倍数でなければならない．実際，$\varphi$ が $\psi$ で割り切れないと仮定すると，$\varphi = k\psi + \xi$ $(0 < \xi < \psi)$ と書ける．したがって，角 $\xi$ の回転もその群に属さなければならない．$\xi < \psi$ より，これは矛盾である．

ある適当な整数 $n$ が存在して，$\psi = 360°/n$ でなければならない —— そうでなければ，$R_A^{\psi}$ のある累乗は $\psi$ より小さな角で表されるからである．このように，平面運動の任意の有限群に属するすべての回転は，$R_A^{k\psi}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1, \psi = 360°/n)$ であることがわかる．もし，その群が対称変換を含まないならば，それは $C_n$ である．

次に，その群が $n$ 個の回転と，少なくとも1つの対称変換を含むと仮定しよう．このとき，その群の対称変換の個数がちょうど $n$ 個であることを示す．

実際，$R_1, R_2, \ldots, R_n$ を $n$ 個の異なる回転とし，$S$ をある対称変換とすると，$S \circ R_1, S \circ R_2, \ldots, S \circ R_n$ は，$n$ 個の異なる対称変換である．したがって，対称変換の個数は $n$ 以上である．同様に，その群の回転の個数も対称変換の個数以上になる．なぜならば，$S_1, S_2, \ldots, S_m$ が $m$ 個の異なる対称変換ならば，$S_1 \circ S_1, S_1 \circ S_2, \ldots, S_1 \circ S_m$ は $m$ 個の異なる回転だからである (恒等変換を含む)．

このように，平面運動の任意の有限群は $C_n$ であるか，または，ある点を中心とする $n$ 個の回転とその回転と同数の対称変換で構成されることがわかる．$n = 1$ のとき，その有限群は1個の対称変換と恒等変換を要素として含む位数2の群 $D_1$ である．$n \geq 2$ のとき，すべての対称変換の対称軸が回転の中心を通ることを示さなければならない．まず，有限群は平行な2直線をそれぞれ対称軸とする2つの対称変換を含まないことに注意しよう．なぜならば，その積はゼロベクトルでないベクトルによる移動だからである．したがって，任意の2本の対称軸は交点がある．対称軸が点 $P$ で交わり，そのなす角が $\varphi$ の2つの対称変換の積はまたその群に属し，$P$ の回りの角 $2\varphi$ の回転となる．よって，点 $P$ は，すべての回転の中心 $A$ と一致しなければならない．一方，角 $\varphi$ は $180°/n$ の整数倍でなければならない．したがって，その有限群は $D_n$ であることがわかる．これで示せた．　□

**練習 56.**　$a$) 対称軸がちょうど2本の平面図形は存在するか．$b$) 対称点がちょうど2点の平面図形は存在するか．

**練習 57.**　一番対称的で (つまり，一番大きい対称群をもつ) 有界な平面図形を指し示し，名を述べよ．

## §3.4　共役変換

問題28の解答のところで，$\Phi_1$ と $\Phi_3$ の対称群は同じであると述べた．すなわち $\mathrm{Sym}(\Phi_1) = \mathrm{Sym}(\Phi_3)$ である．この等式の厳密な意味は何だろうか？さらに，もっと一般的に，前節で証明した分類定理の厳密な意味は何だろうか？ この疑問について少し考えよう．

このような対称群どうしの等号は，言葉でいうと次の意味がある．2つの

図形 $\Phi_1$, $\Phi_3$ が中心も対称軸も一致するように置かれているときのみ，集合 $G = \mathrm{Sym}(\Phi_1)$ と集合 $H = \mathrm{Sym}(\Phi_3)$ は一致する．そうでなければ，$G$ と $H$ は密接に関係づけられているとしても異なるものである．次にこの関係について説明しよう．

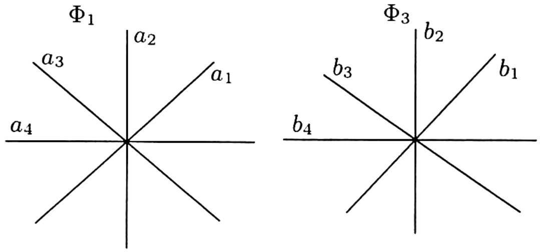



図 3.4　共役な対称群

$G$ の回転の中心を $A$，対称軸を図 3.4 の $a_1, \ldots, a_4$ とし，$H$ の回転の中心を $B$，対称軸を図 3.4 の $b_1, \ldots, b_4$ とする．また，$B$ を $A$ にうつし，おのおのの $b_i$ を $a_i$ にうつす平面運動を $f$ とする．$G$ の変換は，次の方法で $H$ の元から得られる．たとえば，$b_3$ を軸とする対称変換を使って考えてみよう． まず，$\Phi_1$ を $f^{-1}$ で動かし，次に，$b_3$ に関しする対称変換を施し，最後に，$f$ でもどす．容易にわかるように，$\Phi_1$ はこれらの動作の結果，$\Phi_1$ を $a_3$ に関して対称変換した図形と同じ図形になる．

一般に，$H$ の任意の元 $h$ に対して，$f \circ h \circ f^{-1}$ は $G$ の元である．もっと詳しく言うと，$h$ が $b_i$ に関する対称変換であるとき，$f \circ h \circ f^{-1}$ は $a_i$ に関する対称変換である．また，$h$ が $B$ の回りの回転であるとき，$f \circ h \circ f^{-1}$ は $A$ の回りの同じ角の回転である．

**定義 11** 2 つの変換 $h \in H$ と $g = f \circ h \circ f^{-1} \in G$ は共役であるという．$f \circ h \circ f^{-1}$ を $f$ による共役化という．

共役変換は以前，複素数を用いて回転公式を表したときと，練習 37(第 2 章) ででてきた．

運動の群 $H$ の元のリストが，ある (1 つの同じ) 運動による共役化で，変換群 $G$ の元のリストになるならば，$H$ と $G$ は共役であるという．平面上に任意に置かれた 2 つの合同な図形の対称群は，つねに共役である．その共役

化は，1つの図形をもう1つの合同な図形にうつす運動によって実現される．

一般に，共役化は，ある物体を異なる視点からみることとして理解されるべきである．共役化させる運動は2つの視点 (物理の言葉で，**2つの観測系**という) を関連づける運動である．

共役部分群の一番重要な性質は，それらが同じ内部構造をもつことである．この数学的な意味を説明しよう．$G$ と $H$ をどちらも平面運動の群とし，運動 $f$ によって，互いに共役化されるものとする．このとき，$g = f \circ h \circ f^{-1}$ ならば，$g$ と $h$ は互いに**対応している**といい，$g \leftrightarrow h$ と表す．このとき，この対応は1対1対応である．なぜならば，$h$ は $g$ によって $h = f^{-1} \circ g \circ f$ と一意的に表されるからである．

このとき，次の2つの性質が成り立つ：

1. $g_1 \leftrightarrow h_1, g_2 \leftrightarrow h_2$ ならば $g_1 \circ g_2 \leftrightarrow h_1 \circ h_2$
2. $g \leftrightarrow h$ ならば $g^{-1} \leftrightarrow h^{-1}$

このことは，次のように確かめられる：

1. $g_1 \circ g_2 = (f \circ h_1 \circ f^{-1}) \circ (f \circ h_2 \circ f^{-1}) = f \circ (h_1 \circ h_2) \circ f^{-1}$
2. $(f \circ h \circ f^{-1})^{-1} = f \circ h^{-1} \circ f^{-1}$

このように，群における演算 (合成と逆変換) は，それぞれこの対応で，もう一方の群の同様の演算に対応する．この対応を**同型写像**という．同型写像については，第4章で詳しく説明する．

次に，平面運動の群における共役化の公式を導こう．

**問題 29** 対称変換 $S_l$ を用いて，回転 $R_A^\alpha$ に共役な運動を求めよ．

**解答．** 共役な運動を求めるためには，$S_l$ を使い，視点を変えて**平面の下から**回転をみなければならない．その結果は明らかに，直線 $l$ に関する点 $A$ の対称点 $A'$ を中心とする角 $-\alpha$ の回転となる．この結果を厳密に確認しよう．つまり，次のことを証明する．

$$S_l \circ R_A^\alpha \circ S_l^{-1} = R_{A'}^{-\alpha}$$

$M$ を平面上の任意の点とする (図 3.5 参照)．$M_1 = S_l^{-1}(M) = S_l(M)$, $M_2 = R_A^\alpha(M_1), M_3 = S_l(M_2)$ とすると，$\triangle MA'M_3 \equiv \triangle M_1AM_2$ である．ゆえに，$M_3 = R_{A'}^{-\alpha}(M)$.

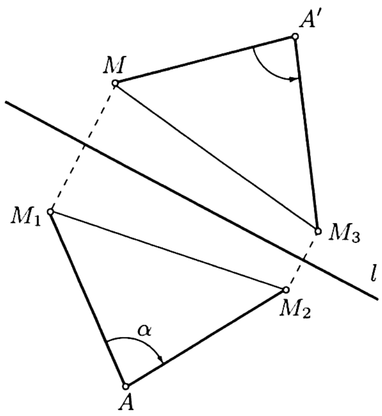



図 3.5 対称変換による回転の共役化

**練習 58.** 平面運動の群における共役化をすべて表に表せ．すなわち，任意の $g = T_{\mathbf{a}}, R_A^\alpha, S_l, U_l^{\mathbf{a}}$ と任意の $f = T_{\mathbf{b}}, R_B^\beta, S_m, U_m^{\mathbf{b}}$ に対して，$f \circ g \circ f^{-1}$ を求めよ．

読者には，平面運動の操作が自由にできる‘二面体の道具’を作って練習してもらいたい．その道具は段ボールから切り取られた正多角形と紙きれに描かれた同じ正多角形でできていて，どちらの多角形の頂点にも順番に $1, 2, \cdots$ と番号が書かれている (図 3.6).

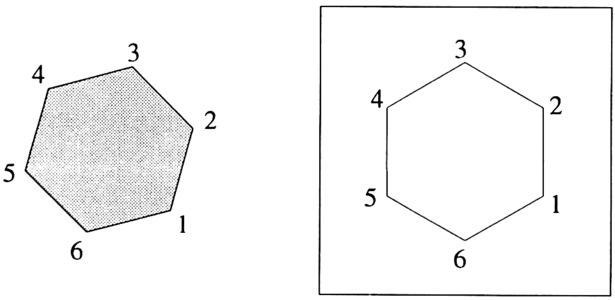



図 3.6 二面体の道具

この道具で二面体群 $D_n$ を勉強することができる．たとえば，$D_n$ の元の

積を求めるには，まず，頂点の番号が一致するようにその紙きれの上に段ボールの多角形を重ねる．そして，与えられた運動を順に施して，頂点の番号を比べることによって，その合成運動を求める．同じように，共役元も求められる．

**練習 59.** 適当な二面体の道具を用いて，$D_3$ と $D_4$ の積表と共役化の表をそれぞれ作れ．

共役運動の表 (問題 58 の答え) をみると，移動 $T_{\mathbf{a}}$ は，移動 $T_{\mathbf{b}}$ によって共役化されても，変わらないことに気がつくだろう．

$$T_{\mathbf{b}} \circ T_{\mathbf{a}} \circ T_{\mathbf{b}^{-1}} = T_{\mathbf{a}}$$

この等式は，$T_{\mathbf{b}} \circ T_{\mathbf{a}} = T_{\mathbf{a}} \circ T_{\mathbf{b}}$ と同値である．またこれは，任意の 2 つの移動が**可換**であることを意味する．言い換えると，合成に関してそれらは交換できるということである (可換性については問題 24 で述べた)．

任意の 2 つの元が可換である変換群は**可換**であるという．

**問題 30** 平面運動の有限可換群をすべて求めよ．

**解答.** すでに平面運動の有限群のすべてを知っている．すなわち $C_n$ と $D_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ である．

任意の巡回群 $C_n$ は可換群である．このことは，ある 1 点を中心とする回転の群が，可換であることからわかる．実際，角 $\alpha$ の回転と角 $\beta$ の回転の積は，順序に関係しない角 $\alpha + \beta$ の回転である．

$D_1$ は可換である．2 つの元だけで構成されていて，そのうちの 1 つは恒等変換だからである．$D_2$ も可換である．実際，$D_2$ はその対称軸が互いに垂直である 2 つの対称変換 $S_1, S_2$ と半回転 $R$ と恒等変換で構成されている．以前導いた規則によると，合成 $S_1 \circ S_2$ は，ある方向の 180° 回転で，一方，$S_2 \circ S_1$ は，その反対方向の 180° 回転である．よって，$S_1 \circ S_2 = S_2 \circ S_1$ である．ゆえに，$S_1 \circ R = S_1 \circ S_2 \circ S_1 = R \circ S_1$．同様に，$S_2 \circ R = R \circ S_2$ である．したがって，$D_2$ は可換である．

次に，$D_n$ $(n \geq 3)$ を考える．$D_n$ の元で，その対称軸が隣りどうし

の対称変換を 2 つえらぶ．すなわち，その 2 直線のなす角が $180°/n$ の対称変換である．それらの積は，正または負の方向の $360°/n$ の回転である．よって，それは積の順序に依存する．$n \geq 3$ より，その 2 つの積の値は異なることがわかる．したがって，$D_n$ は非可換である．

このように，平面運動の有限可換群の完全リストは $D_1, D_2, C_n$ $(n \in N)$ となる．

積の表から，その群が可換であるかどうか簡単に読みとれる．すなわち，群が可換であるための必要十分条件は，その積の表が主対角線に関して対称になることである．練習 59 をやってみた読者は，$D_3$ と $D_4$ が非可換であることを視覚的に理解できただろう．しかし，積表が全体として対称でなくても，対称な位置に同じ元が現れることがある．それは可換な元の組が存在することを示している．

**練習 60.** $D_3$ と $D_4$ について，可換な元の組をすべてあげよ．

## §3.5 巡回群

巡回群 $C_n$ が可換であることを示す別の方法がある．$R$ を角 $360°/n$ の回転とすると，$C_n$ の任意の元は，$R$ の累乗で表される (つまり $R^2 = R \circ R$, $R^3 = R \circ R \circ R, \cdots, R^n = \mathrm{id}$)．また，明らかに $R^k \circ R^l = R^{k+l} = R^l \circ R^k$ である．

変換 $f$ の累乗が，群のすべての元を表すことができるとき，$f$ をその群の**生成元**という．

生成元の意味をもっと理解するために，群ではなく，変換 $f$ をただ 1 つの元としてもつ集合 $M$ を想像してみよう．問題は「$f$ を含む変換群が存在するか」である．答えは「存在する」である．$f$ を含む一番最小の群は，次のように構成される．

ある群が $f$ を元とするとき，群の定義の 1 番目の性質によって，$f$ の累乗 $f^2, f^3, \cdots$，すべてが含まれなければならない．2 番目の性質によって，その群は，逆変換 $f^{-1}$ を含まなければならない．したがって，その群は $f$ の

累乗 $(f^{-1})^2$, $(f^{-1})^3 \cdots$ すべてを含まれなければならない．

**練習 61.** 等式 $(f^{-1})^k = (f^k)^{-1}$ を証明せよ．

変換 $(f^{-1})^k$ $(k \in N)$ は，$f$ の負の累乗とよばれ，$f^{-k}$ とも表される．任意の変換の 0 乗は定義から恒等変換であると定義する．ここで注意してほしいのは，与えられた変換の整数乗すべての集合 $\ldots f^{-2}, f^{-1}, f^0, f^1, f^2, \ldots$ は，つねに群をなすことである．なぜならば，恒等式 $f^k \circ f^l = f^{k+l}$, $(f^k)^{-1} = f^{-k}$ は，すべての自然数 $k, l$ に対してだけではなく，すべての整数 $k, l$ に対して成り立つからである． $f$ の整数乗すべての集合を $f$ **によって生成される群**という．

可能性として，次の 2 つの場合がある：

1. $f^k$ がすべて異なるとき．このとき，$f$ によって生成される群の元は無限個ある．この群を**無限巡回群**という．

2. 累乗のなかに同じものがあるとき．このとき，ある整数 $n \in N$ が存在し，$f^n = \mathrm{id}$ となる．実際，$f^k = f^l$ $(k > l)$ ならば，$f^{k-l} = \mathrm{id}$ であるからである．$n \equiv \min\{m \in N | f^m = \mathrm{id}\}$ を，$f$ の**位数**という．この場合，$f$ によって生成される群は，ちょうど $n$ 個の異なる変換 $f, f^2, \cdots, f^n$ で構成される (これらはすべて異なる．実際，$f^k = f^l$ $(0 < l < k \leq n)$ ならば，$f^{k-l} = \mathrm{id}$ となり，これは $n$ のえらび方から矛盾である)．

   このとき，$f$ によって生成される群を**位数 $n$ の有限巡回群**という．とくに，この概念は巡回群 $C_n$ を含む．

$f$ が無限巡回群を生成するとき，$f$ は**無限位数をもつ**ともいう．定義から，恒等変換の位数は 1 で，それが生成する群はただ 1 つの元からなる．これを**自明な群**という． 対合的な変換は位数 2 の群を生成し，それ自身と恒等変換からなる．

**問題 31** $C_{12}$ の生成元を求めよ．また，その生成元以外の元によって生成される $C_{12}$ の部分群も求めよ．

**解答．** $C_{12}$ は $30^\circ$ の倍数角の 12 個の回転で構成される．これらの回転はすべて $30^\circ$ 回転の累乗であるから，$30^\circ$ 回転は $C_{12}$ の生成

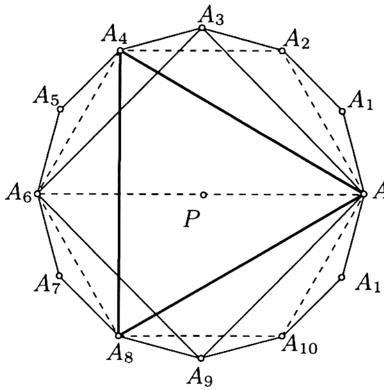



図 3.7 巡回群 $C_{12}$ とその部分群

元となる．30° 回転の逆回転 (330° 回転) もまた，明らかに生成元である．他の元について考えるのを簡単にするため，図 3.7 を用いる．ただし，$C_{12}$ のすべての元は，正十二角形の頂点として表されている．すなわち，$A_0$ は恒等変換に対応し，$A_1$ は 30° 回転に対応する．$C_{12}$ の元について 1 つずつ考えてみよう．そして，任意の元に対して，その元の累乗に対応する頂点に印をつけてみると，次のことがわかるだろう：

- $C_{12}$ を生成する回転がさらに 2 つ —— 150° 回転と 210° 回転 —— ある．
- 60° 回転と 300° 回転は，位数 6 の群 $C_6$ を生成する．このことは，図 3.7 の六角形 $A_0A_2A_4A_6A_8A_{10}$ として視覚的に表される．
- 90° 回転と 270° 回転は，位数 4 の群を生成する (四角形 $A_0A_3A_6A_9$)．
- 120° 回転と 240° 回転は，位数 3 の群を生成する (三角形 $A_0A_4A_8$)．
- 対合である 180° の回転は，群 $C_2$ を生成する (線分 $A_0A_6$)．

この結果は，次の表で要約される．表の上の欄は $k$ の値，下の欄は回転 $R^k$ の位数である ($R$ は 30° 回転)．

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 1 | 12 | 6 | 4 | 3 | 12 | 2 | 12 | 3 | 4 | 6 | 12 |

**練習 62.** 最大公約数 (GCD) を用いて $f$ で生成される位数 $n$ の巡回群の元 $f^k$ の位数を表す一般式を求めよ．

有限群に属する変換がこの群の生成元であるための必要十分条件は，その変換の位数がその群の位数に等しいことである．巡回群 $C_n$ の生成元の個数を $\varphi(n)$ と表し，関数 $\varphi$ を**オイラー関数**という．たとえば，上の表から $\varphi(12) = 4$ であることがわかる．

**練習 63.** (a) $\varphi(n)$　$(n = 1, 2, \ldots, 20)$ を計算せよ．(b) $n$ の素因数分解を用いて，$\varphi(n)$ の一般式を求めよ．

平面運動はタイプによってどんな位数をもつのかを調べよう．明らかに，自明でない移動と映進は無限位数をもつ．なぜなら，このような変換を繰り返すと，任意の点は無限個の位置を占めてしまうからである (図 3.8a, b)．

**練習 64.** 自明でない移動，あるいは映進を施しても動かない平面図形はあるか．

対称変換の位数はどれも 2 である (図 3.8c)．

回転の位数はいろいろある．回転角が有理数の角度 $\frac{m}{n} \times 360°$ で表されるとき，その回転の位数は $n$ である．ただし，$m/n$ は既約分数である (図 3.8d)．また，回転角が無理数であるとき，その回転の位数は無限である．

**練習 65.** 問題 31 の回転に対して，上記の主張を確かめよ．また，この主張を一般に証明せよ．

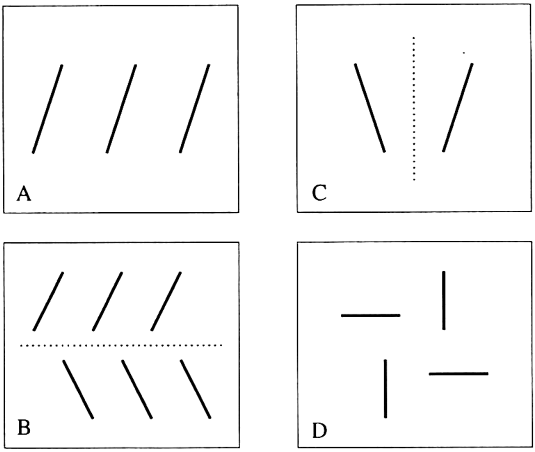



図 3.8 移動，対称変換，映進の位数

## §3.6 生成元と関係式

巡回群は 1 つの元によって生成される群だから，群のなかでは一番簡単なものである．さて次に，1 つの元では生成しきれない群について考えてみよう．

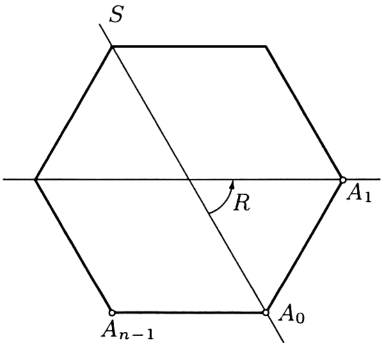



図 3.9 群 $D_n$

まず，$D_n$ $(n \geq 2)$ は巡回群ではないことを示す．実際，$n > 2$ のとき，$D_n$ が可換でないことはすでにみた．よって，$D_n(n > 2)$ は巡回群ではないことがわかる．$n = 2$ のとき，$D_2$ の自明でない元の位数はすべて 2 である．

つまり，$D_2$ には位数4の元が存在しない．よって，$D_2$ も巡回群ではない．

次のような疑問が自然におこる.「$D_n$ の元の集合で $D_n$ を生成することができる一番小さいものは何か？ つまり，その集合の元の積と逆変換によって，群の任意の元を表すことができるような一番小さい集合は何か？」2つの元で事足りる．たとえば，$\{R, S\}$ はこのような集合の例となる ($R$ は $360°/n$ 回転，$S$ は任意の対称変換)．実際，$D_n$ の任意の回転は $R^k$ と表され，$D_n$ の任意の対称変換は $R^k \circ S$ と表される．

最初の主張は明らかである．二番目の主張を証明しよう．

**『$D_n$ の任意の対称変換は $R^k \circ S$ と表される.』**

まず，$R^k \circ S$ $(k = 0, 1 \ldots, n-1)$ は，すべて異なることに注意しよう．実際，$R^k \circ S = R^l \circ S$ の両辺に右から $S$ を施すと $R^k = R^l$ となるから，これは矛盾である．また，これらの運動はすべて真ではない．すなわち対称変換であるが回転でない運動である．$D_n$ の元の対称変換の総数は $n$ だから，そのおのおのの元はリスト $S$, $R \circ S, \ldots$, $R^{n-1} \circ S$ のなかに現れなければならない．

したがって，$\{R, S\}$ は $D_n$ の生成元の集合である．すなわち，$D_n$ は，次のように表される．

$$D_n = \{\mathrm{id}, R, \ldots, R^{k-1}, S, R \circ S, \ldots, R^{k-1} \circ S\}$$

さて，$R$ と $S$ による $D_n$ の積の規則を述べよう．

- $R^k$ と $R^l$ の合成は $R^{k+l}$ である．$k + l > n$ ならば，$R^{k+l} = R^{k+l-n}$ とおきかえることができる．

- 同様に，$R^k \circ (R^l \circ S) = R^{k+l} \circ S$ である．$k + l > n$ ならば，$R^k \circ (R^l \circ S) = R^{k+l-n} \circ S$ とおきかえるほうが簡単である．

- 合成 $(R^k \circ S) \circ R^l$ を求めてみよう．$S \circ R^k \circ S = R^{-k}$ であることを思いおこそう (問題 29)．この等式の両辺に右から $S$ を施すと，$S \circ R^k = R^{-k} \circ S$ となる．したがって

$$(R^k \circ S) \circ R^l = R^k \circ (S \circ R^l) = R^k \circ (R^{-l} \circ S) = R^{k-l} \circ S.$$

- 同様に，$(R^k \circ S) \circ (R^l \circ S) = R^{k-l}$ である．

$D_n$ に対する積表は，生成元 $R$ と $S$ に関して次のように表される．

| | $R^l$ | $R^l \circ S$ |
|---|---|---|
| $R^k$ | $R^{k+l}$ | $R^{k+l} \circ S$ |
| $R^k \circ S$ | $R^{k-l} \circ S$ | $R^{k-l}$ |

ここで，$R^n = \mathrm{id}$ から，必要ならば，$R$ のべき指数は $n$ 個増やしたり減らしたりすることができる．

$n$ が具体的な値をとると，上の表は完全な形になる．たとえば，$n = 3$ のときは，次のような表になる．

| | id | $R$ | $R^2$ | $S_a$ | $S_b$ | $S_c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| id | id | $R$ | $R^2$ | $S_a$ | $S_b$ | $S_c$ |
| $R$ | $R$ | $R^2$ | id | $S_b$ | $S_c$ | $S_a$ |
| $R^2$ | $R^2$ | id | $R$ | $S_c$ | $S_a$ | $S_b$ |
| $S_a$ | $S_a$ | $S_c$ | $S_b$ | id | $R^2$ | $R$ |
| $S_b$ | $S_b$ | $S_a$ | $S_c$ | $R$ | id | $R^2$ |
| $S_c$ | $S_c$ | $S_b$ | $S_a$ | $R^2$ | $R$ | id |

重要なことは，$D_n$ の完全な積表は，生成元 $R, S$ についての次の 3 つの関係式から導かれることである．

$$S^2 = \mathrm{id}; \quad (S \circ R)^2 = \mathrm{id}; \quad R^n = \mathrm{id} \tag{3.1}$$

他のすべての関係式は群の定義を形式的に用いると，この 3 式から導かれるのである．例として，関係式 $S \circ R^k \circ S = R^{-k}$ について確かめよう．

(3.1) 式の 2 番目の関係式は

$$S \circ R \circ S \circ R = \mathrm{id}$$

と展開される．これは

$$S \circ R \circ S = R^{-1}$$

と同値である．$S^2 = \mathrm{id}$ を考慮すると

$$S \circ R^k \circ S = R^{-k}$$

である．

次のような意味で，関係式 (3.1) は $D_n$ の**定義関係式**の完全な集合となる．すなわち，もし群が2つの元 $S, R$ によって生成されていて，$S$ と $R$ は関係式 (3.1) と，**この3式による形式的帰結のみをみたすとき**，この群の位数は $2n$ で，その構造は $D_n$ の構造と同じになる．

ここで，変換群の生成元と定義関係式の定義をしよう．$S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ を群 $G$ の有限部分集合とする．$M = s_{i_1}^{k_1} s_{i_2}^{k_2} \cdots s_{i_m}^{k_m}$ の形の式を $S$ 上の単項式 とよぼう．ただし，$i_1, \ldots, i_m$ は 1 から $n$ までの数，巾指数 $k_1, \ldots, k_n$ は任意の整数とする．$s_1, \ldots, s_n$ 間の**関係式** とは，$G$ の元 id に等しい $S$ 上の単項式 $r$ である．$r_1 r_2^{-1} = \mathrm{id}$ に同値な関係式を $r_1 = r_2$ とも書く．

**定義 12** $G$ を変換群，$S$ を $G$ の部分集合，$R$ を $S$ の元の間の関係式の集合とする．

このとき，次の2つの条件をみたすならば，$S$ を $G$ の生成元の集合，$R$ を $G$ の定義関係式の集合という：

1. $G$ の任意の元は，$S$ 上の単項式で表される．
2. $S$ の元の間の任意の関係式は，集合 $R$ に属する関係式の形式的帰結である．

関係式 $r_1 = \mathrm{id}, \ldots, r_m = \mathrm{id}$ の形式的帰結とは，与えられた集合から導かれる新しい単項式を意味する．ただし，それは群の演算 (積や逆変換) や結合法則のような性質，また簡約ルール $s^k s^l = s^{k+l}$, $s^0 = \mathrm{id}$，そして $ab = \mathrm{id}$ と $ba = \mathrm{id}$ が同値な式であるという事実などから導かれた式である．たとえば，2つの関係式 $ab^2 = \mathrm{id}$, $ba^2 = \mathrm{id}$ からは $b = a^{-2}$ より，関係式 $a^3 = \mathrm{id}$ が導かれる．

ある意味で元たち $s_1, \ldots, s_n$ の性質はここでは意味がないことに注意しよう．このことは，のちに (第5章，p.125) 定義する，あらかじめ決められた生成元と関係式の集合をもった抽象群の概念によって理解できるだろう．

この節では定義関係式の重要性が理解できるいくつかの問題にとどめよう．

**問題 32** $A, B$ を次の関係式をみたす変換とする．

$$A^3 = \mathrm{id}; \quad B^5 = \mathrm{id}; \quad AB = B^4 A \tag{3.2}$$

また，群の公理とこの3式から形式的に得られる関係式以外はみたされない

とすると，変換 $A, B$ によって生成される群は，位数 3 の巡回群であることを証明せよ．

**解答．** 式を簡単にするため，合成の記号 $\circ$ を省略する．それに対応して「合成」の代わりに「積」という言葉を用いることにする．

$A$ と $B$ によって生成される群 $G$ の任意の元は

$$B^{k_1}A^{l_1}B^{k_2}A^{l_2}\cdots B^{k_m}A^{l_m}$$

と書ける．ただし，(3.2) 式より，$0 \leq k_i \leq 4, 0 \leq l_i \leq 2$ と仮定できる．次の規則を用いて，このワードを並べかえる．**$A$ が $B$ の左隣に現れたら，$AB$ を $B^4A$ でおきかえる．**

このルールを十分な回数当てはめれば，遅かれ早かれ，$B$ という語はすべて左側に押し出され，結局 $B^kA^l$ という形のワードにたどりつく．ただし，前と同様に $0 \leq k_i \leq 4$，$0 \leq l_i \leq 2$ とする．

整数 $k$ は，5 個の異なる値をとることができ，整数 $l$ は，3 個の異なる値をとることができるから，積 $B^kA^l$ の総数は，15 以下である．しかし，これらの元すべてが異なるとは限らない．なぜなら，定義関係式 (3.2) から，次の等式が導かれるからである．

$$B = A^3B = A^2B^4A = AB^{16}A^2 = B^{64}A^3 = B^4$$

また，このルールは次のようにもいえる：**文字 $A$ が文字 $B$ を左から右に通り抜けるとき，通り抜けられた文字 $B$ の指数には 4 がかけられる．**

ゆえに，$B^3 = \mathrm{id}$．関係式 $B^5 = \mathrm{id}$ より，結局，$B = \mathrm{id}$ であることがわかる．このように，$G$ は，$A^3 = \mathrm{id}$ をみたすただ 1 つの元 $A$ で生成される群である．生成元 $A$ は，自明ではありえないことに注意しよう．なぜなら，関係式 $A = \mathrm{id}$ は，関係式 (3.2) から導かれないからである．実際，$A$ を $120°$ 回転とし，$B$ を恒等変換とすると，(3.2) の 3 つの関係式はみたされるが，$A = \mathrm{id}$ ではない．

**練習 66.** $A, B$ を $ABA^2 = \mathrm{id}, B^2A = \mathrm{id}$ をみたす自明でない平面運

動とする．このとき，$A$ と $B$ によって生成される群の位数を求めよ．また，$A$ と $B$ はどのような運動か．

次の練習問題は，ちょっとみただけでは変換群の定理とは全く無関係にみえるが，同様の方法で解くことができる．

**練習 67.** 部族 Aiue の言葉には，4 文字 A, I, U, E しかない．文字 E は特別である．E だけで使うとある意味をもつが，どのような言葉のどのような場所につけたとしても，その言葉の意味は変わらない．さらに，文字 A, I, U は連続的に 7 回発音すると，E と同義語になる．また，次の言葉の断片は，同義語として考えられる：UUUI=IU, AAI=IA, UUUA=AU．この部族の総人口は 400 人である．この部族のすべての人々はそれぞれ異なる名前をつけることができるか．

**練習 68.** $D_n$ の生成元の組をすべて求めよ．また，その生成元のおのおの組に対する定義関係式を示せ．

定義関係式は生成元がどのような個数の群にも使える．たとえば，位数 $n$ の巡回群は 1 つの生成元 $R$ と 1 つの定義関係式 $R^n = \mathrm{id}$ で表示される群である．無限巡回群はどのような関係式ももたない 1 つの生成元 $T$ で構成される群である．この最後の主張「どのような関係式ももたない」の意味をもう一度強調したい．ここで意味していることは，$T$ に関するどのような**自明**でない関係式ももたないことである．自明でない関係式とは $T$ と id を含む関係式で，群の公理からは導かれない式である．ここで，自明な関係式とは次のような式である．$T^{-1}T^4T^{-3} = \mathrm{id}$.

ここで，3 つの生成元をもつ群の例をあげよう．たとえば，問題 27 で $G$ と表された平面運動で構成される群である．この $G$ を正式な結晶学の記号で，$p3m1$ と表す (結晶群については第 4 章参照)．定義より，$p3m1$ は無限個の対称変換で構成される．つまり図 3.1a (p.66) で示されるすべての直線に関する対称変換によって生成される．

しかし，この群はただ単に 3 つの対称変換 $S_a$, $S_b$, $S_c$ だけでも生成できる．ただし，$a$, $b$, $c$ はそれぞれ図 3.1a の格子 1 単位をなす正三角形の 1 辺である．このことを示すために，三角格子に属する任意の直線 $x$ に関する対称変換 $S_x$ が $S_a$, $S_b$, $S_c$ の式で表されることを示さなければならない．

たとえば，$S_l$(図 3.1a の記号) を考えよう．$l$ は $c$ に関して $a$ に対称な直線だから，$S_l$ は $S_a$ の $S_c$ による共役化により得られる：$S_l = S_c \circ S_a \circ S_c$. 同様に，$S_l(b) = m$ より，$S_m = S_l \circ S_b \circ S_l = S_c \circ S_a \circ S_c \circ S_b \circ S_c \circ S_a \circ S_c$.

同様の議論で，$S_a$, $S_b$, $S_c$ によって，任意の対称変換 $S_x$ を表すことができる．事実，格子に属する任意の直線 $x$ は $S_a$, $S_b$, $S_c$ の適当な合成によって $a$ あるいは $b$ あるいは $c$ から得られる．

さて，3 つの生成元 $S_a$, $S_b$, $S_c$ は，次の関係式をみたすことをみよう：

$$S_a^2 = S_b^2 = S_c^2 = \mathrm{id} \tag{3.3}$$

$$(S_a \circ S_b)^3 = (S_b \circ S_c)^3 = (S_c \circ S_a)^3 = \mathrm{id} \tag{3.4}$$

**練習 69.** $F_1, F_2, F_3$ を無限群を生成する 3 つの平面運動で，次の関係式をみたすものとする．

$$F_1^2 = F_2^2 = F_3^2 = (F_1 \circ F_2)^3 = (F_2 \circ F_3)^3 = (F_3 \circ F_1)^3 = \mathrm{id}$$

このとき，$F_1, F_2, F_3$ は，おのおの，正三角形のある辺に関する対称変換であることを証明せよ．

関係式 (3.4)，(3.4) から無限個の関係式が導かれるが，練習 71 より，(3.3), (3.4) 式は，平面運動の群を一意的に決定する．実際，これらの関係式は先に説明した群 $p3m1$ の**定義関係式**であることが示される．

# 第4章
# 一般の群

この章では群の一般概念を紹介する．この特別な場合として変換群がある．この一般的な設定で群の基本的な性質を議論し，算術へ群を適用する．

## §4.1 群の一般概念

変換群の研究において，運動を扱うか，もっと一般に変換を扱うかは，あまり重要ではなかった．重要なのは，群 $G$ の次の 4 つの性質である．これは，$G$ の任意の元の組に対して定義される**合成**に課せられた必要条件である：

1. $G$ に属する 2 つの運動の合成は，$G$ に属する．

2. 運動の合成は結合法則をみたす．

3. $G$ には恒等変換が含まれる．恒等変換は，任意の運動 $f$ との合成が $f$ に等しいという性質で特徴づけられる．

4. $G$ の任意の運動に対して，その逆の運動は，$G$ の元である．

集合 $G$ の任意の 2 つの元に，$G$ のある 1 つの元が対応するような演算が与えられていて，先の 4 つの性質が成り立つとき，$G$ は群となる．たとえば，足し算を演算とする実数の集合 $(\mathbb{R}, +)$ はこの 4 つの性質をもつから，群である．第 1 章 (問題 1，7 など) で，いろいろな性質の元 (数，点，ベクトル) や異なる演算 (和，積) に関して，これらの性質が使われていたことに注意しよう．問題 32 と 練習 67 が類似していることも注目すべきである．これらのことは，群の概念が一般的な設定で述べられることを示している．それでは，群の定義を一般的な設定で述べよう．

**定義 13** 集合 $G$ は次の条件をみたすとき**群**とよばれる：

I. $G$ の任意の元の順序づけられた組 $(a, b)$ に対して，$G$ の元 $a * b$ が決められている (この法則を**二項演算**あるいは単に**演算**という).

II. 演算 $*$ は結合法則をみたす．すなわち，$G$ の任意の 3 つの元 $a$, $b$, $c$ に対して，等式 $(a * b) * c = a * (b * c)$ が成り立つ.

III. $G$ に**単位元**が存在する．単位元とは $G$ の任意の元 $a$ に対して，$a * e = e * a = a$ となる元 $e$ である.

IV. $G$ の任意の元 $a$ に対して，$a * a' = a' * a = e$ となる**逆元** $a' \in G$ が存在する.

性質 I〜IV を**群の公理**という．次のことに注意しよう：変換群の定義 (p. 68) は，群の公理のうちの 2 つ (I と IV) だけで構成されているが，任意の変換群はこの一般的な意味で群になる．実際，公理 II は，変換の合成 (p. 61) に関してつねに成立する．また，公理 III は，公理 I, IV から導かれる．なぜならば，変換の合成に関する単位元は，恒等変換であるが，IV の $e$ (恒等変換) は I より与えられた集合 $G$ に属するからである.

**練習 70.** 変換の有限集合 $G$ に対して，公理 IV は公理 I〜III から導かれることを証明せよ.

記号 $*$(アスタリスク), $'$(プライム) や言葉「単位元」,「逆元」の代わりに，いろいろな状況に合わせて他の記号や言葉が用いられる：

1. 変換群において，群の演算 (合成) は小さいまる ($\circ$) で表され，単位元は id (恒等変換) で表される．また，逆元 $f'$ の役割は，逆変換 $f^{-1}$ によって果たされる.

2. 足し算を演算とする数の群 (整数，有理数，実数，複素数) において，単位元は 0 (ゼロ)，数 $a$ の逆元は，逆符合の数 $-a$ である (平面上の点を複素数と考えると，単位元は**極**とよばれ，$P$ と表される).

3. 積を演算とする数の群 (たとえば，正の数全体の集合など) において，演算の印は通常省略される．すなわち，$a * b$ の代わりに $ab$ と書く．単位元は 1，また，$a$ の逆元は $a^{-1}$ である.

数やベクトルなどのような足し算を演算とする群を**加群**という．積を演算とする群を**積の群**という．

数の積に対してとり入れられた記号は大変便利なので，どのような群に対してもよく使われる．ここでも，その記号を用いることにする．気をつけなければならないことは，数の積とは違って，群の積は一般に可換ではないことである．すなわち，$ab$ と $ba$ は，その群の等しい元とは限らない．

**問題 33** 次の集合は群をなすか：

1) 足し算を演算とする偶数全体.

2) 足し算を演算とする奇数全体.

3) 引き算を演算とする実数全体.

4) 足し算を演算とする自然数全体.

5) 足し算を演算とする負でない整数全体.

6) $x * y = x + y - 1$ を演算とする実数全体.

**解答.** 1) 明らかに群の公理をみたす．2) 公理 I をみたさない．つまり，2 つの奇数の和は奇数ではない．3) 公理 I は成立するが，公理 II は成立しない．なぜならば，引き算は結合法則をみたさないからである．たとえば，$(6-5)-3 \neq 6-(5-3)$．4) 公理 I, II はみたされているが，この演算に関する単位元は存在しない．つまり，足し算に関して，単位元の役割を果たす元は 0 だけであるが 0 は与えられた集合に含まれない．5) 4) と比べると，数 0 が集合の元であるという点で異なる．そこで，単位元は存在する．しかし，公理 IV はみたされない．なぜならば，正の整数に対する逆元が存在しないからである．6) この例は，もっと注意が必要である．群の公理すべてを 1 つ 1 つチェックしよう．任意の実数の組 $(x, y)$ に対して，$x + y - 1$ はまた実数であるから，公理 I は成立する．結合法則が成立するか確かめるためには，$*$ の定義を用いて 2 つの表示 $(x * y) * z$ と $x * (y * z)$ を計算しなければならない．次のようになる：

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (x + y - 1) * z = x + y - 1 + z - 1 = x + y + z - 2 \\ x * (y * z) &= x * (y + z - 1) = x + y + z - 1 - 1 = x + y + z - 2\end{aligned}$$

したがって，公理 II はみたされる．単位元 $e$ は，恒等式 $x + e - 1 = e$ ($x$ は任意の元) をみたさなければならない．ゆえに，$e = 1$．よって

公理 III がみたされる．最後に，公理 IV を考える．演算 $*$ は可換であるから，1 つの等式 $x * x' = 1$ だけを考えればよい．したがって，$x + x' - 1 = 1$ より，$x' = 2 - x$ である．よって，公理 IV をみたす．このように，公理 I〜IV が成立するから，集合 $(\mathbb{R}, *)$ は群をなす．

**練習 71.** 次の集合が群をなすかどうかを調べよ．群をなさない場合は，公理 I〜IV のうちのどの公理が成立しないかを示せ：

(1) 足し算を演算とする無理数全体の集合．

(2) $x * y = xy - x - y + 2$ を演算とする $x > 2$ なる実数全体の集合．

(3) 足し算を演算とする 2 進数の有理数 (分母が 2 の累乗である分数) の集合．

(4) 積を演算とする 0 でない 2 進数の有理数全体．

(5) 演算 $x * y = (x + y)/(1 - xy)$ に関して，群をなす実数の集合をつくることはできるか．

群の公理から簡単に導かれる性質で重要なものを述べておく．

1. 群における単位元は一意的である．すなわち，群の公理 III をみたす元 $e$ は 1 つしかない．実際，群 $G$ の 2 つの元 $e_1$，$e_2$ が，任意の元 $a \in G$ に対して次をみたすとする．

$$ae_1 = e_1 a = ae_2 = e_2 a = a$$

この式に $a = e_1, a = e_2$ を代入すると，$e_1 = e_1 e_2 = e_2$ となるからである．

2. $G$ の任意の元 $a, b$ に対して，方程式 $ax = b$ は，一意的に可解である．これは，$ax = b$ であるような $G$ の元 $x$ がただ 1 つ存在するということである．実際， 群の公理 II(結合法則) と IV(逆元の存在) を用いて，与えられた等式の両辺に左から $a^{-1}$ をかけると，$x = a^{-1}b$ となる．

**練習 72.** 方程式 $xa = b$ の解を求めよ．また，その解が一意的であることを証明せよ．

3. 練習 73 の主張は次のことを意味する：
   - 与えられた元 $a \in G$ の逆元は一意的である．
   - 群の積表における任意の横列や縦列には，その群の任意の元が必ず 1 回だけ現れる．この事実の 1 つは，等式 $ax = b$ の一意的な可解性から，もう 1 つは等式 $xa = b$ の一意的な可解性から導かれる．

4. $a \in G$ に対して，$(a^{-1})^n = (a^n)^{-1}$ が成り立つ．このように，変換群の場合と同様に，$a^0 = e$, $a^{-n} = (a^{-1})^n$ $(n > 0)$ とおくと，与えられた元の 0 乗や，負の累乗を定義することができる．したがって，任意の整数 $k, l$ に対して，
$$a^k a^l = a^{k+l} \tag{4.1}$$
が成り立つ．

5. 最後の関係式は，$a$ の整数乗すべての集合が群をなすことを意味する．このような群を**巡回群**といい，$a$ をその巡回群の**生成元**という．$a$ の**位数**とは，$a^n = e$ となる最小の正整数 $n$ である ($a = e$ ならば，その位数は 1 である；任意の $n > 0$ に対して，$a^n \neq e$ ならば，$a$ の位数は**無限であるという**)．$a$ によって生成される群の位数 (元の数) は，$a$ の位数に等しいことに注意しよう．

6. 結合法則の公理は，2 つの積を含む群の 3 つの元の積が，積の計算順序に依らないことを意味する．帰納法により，この性質は，いくつの積に対しても正しくなる．すなわち，積 $a_1 a_2 \cdots a_n$ のなかに，どのように () をつけても，同じ結果になる．たとえば，$(a_1(a_2a_3))a_4 = ((a_1a_2)a_3)a_4 = (a_1a_2)(a_3a_4) = a_1(a_2(a_3a_4)) = a_1((a_2a_3)a_4)$．

さてこれまで，変換 (変換群)，あるいは数 (数の群) のどちらかを扱ってきた．今度は，それらとはかなり異なる性質をもつ群の例をみていこう．

**問題 34** 図 4.1 のように，3 つの入力と 3 つの出力がある電気回路がある．それは，任意の入力が，ある出力に対応するようにワイヤーでつながれている．このような電気回路を **3-スウィッチ**とよぶことにする．3-スウィッチの総数

は 6 であり，すべての 3-スウィッチ は，図 4.1 に示されているものとする．このとき，3-スウィッチ の集合を群にする自然な演算を定義せよ．

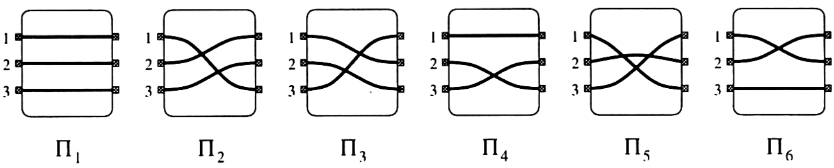


図 4.1　3-スウィッチ

**解答．** スイッチの集合上の自然な演算は**直列接続**である．**2 つのスイッチ** $P, P'$ **を直列接続する**とは，$P'$ の入力と $P$ の出力をそれぞれつなげることである．たとえば，スイッチ $P_2$ とスイッチ $P_4$ を直列接続すると，$P_2$ の入力 1 が $P_4$ の入力 3 を通りぬけて，$P_4$ の出力 2 に到達する．結果として，入力 1 は出力 2 につながることになる．同じように，入力 2 は出力 1 に，入力 3 は出力 3 につながることになる．これはスイッチ $P_6$ と等しい．この意味で $P_2P_4 = P_6$ と書ける．この演算は可換ではない．$P_4P_2 = P_5$ であるからである．

次の表は，3-スウィッチの集合における完全な積表 (厳密には，直列接続の表) である．

| | $\Pi_1$ | $\Pi_2$ | $\Pi_3$ | $\Pi_4$ | $\Pi_5$ | $\Pi_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pi_1$ | $\Pi_1$ | $\Pi_2$ | $\Pi_3$ | $\Pi_4$ | $\Pi_5$ | $\Pi_6$ |
| $\Pi_2$ | $\Pi_2$ | $\Pi_3$ | $\Pi_1$ | $\Pi_6$ | $\Pi_4$ | $\Pi_5$ |
| $\Pi_3$ | $\Pi_3$ | $\Pi_1$ | $\Pi_2$ | $\Pi_5$ | $\Pi_6$ | $\Pi_4$ |
| $\Pi_4$ | $\Pi_4$ | $\Pi_5$ | $\Pi_6$ | $\Pi_1$ | $\Pi_2$ | $\Pi_3$ |
| $\Pi_5$ | $\Pi_5$ | $\Pi_6$ | $\Pi_4$ | $\Pi_3$ | $\Pi_1$ | $\Pi_2$ |
| $\Pi_6$ | $\Pi_6$ | $\Pi_4$ | $\Pi_5$ | $\Pi_2$ | $\Pi_3$ | $\Pi_1$ |

この積表から，3-スウィッチの集合は群をなすことがわかる．しかし，どのようにしてこのことを証明したらよいか？ 群の公理をすべ

てチェックする方法では，公理II(結合法則) だけでも，$6^3 = 216$ 通りの等式をチェックしなければならない．しかし，幸いにも，これらすべてをチェックしなくてもよい．スイッチの積表で，文字 $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$, $P_5$, $P_6$ をそれぞれ，id, $R$, $R^2$, $S_a$, $S_c$, $S_b$ で置き換えて，この表の最後の行と最後の 2 つの列をそれぞれ交換すると，その表はまさに $D_3$ の積表となるからである．このことは，3-スウィッチの直列接続に関する関係式と $D_3$ の合成に関する関係式が同じであることを意味する．したがって，3-スウィッチの集合における直列接続という演算は，$D_3$ の変換における合成の性質をすべてもつことになる．すなわち，3-スウィッチの演算に関して結合法則が成り立ち，3-スウィッチの集合には，単位元 (ここでは，スウィッチ $P_1$) が存在し，任意の swich に対してその逆元が存在することになる．よって，3-スウィッチの集合は，直列接続という演算に関して群をなす．

上記の例の数学的内容は，集合 $\{1,2,3\}$ からそれ自身 $\{1,2,3\}$ への 1 対 1 写像，別の言葉で言うと，この集合の**変換**をすべて記述したことにある．

集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ の変換は，$n$ 個の元の**置換**または**位数 $n$ の置換** という．1 が $i_1$, 2 が $i_2$, …, $n$ が $i_n$ になる置換は，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ と表す．一般に，位数 $n$ の置換は，$n!$ 個あり，群をなす．この群を $S_n$ と表す．

さて，与えられた位数の置換すべての集合に，2 つの異なる群構造の導入方法がある．1 つの方法は，ちょうど変換と同じように置換を扱う方法で，置換 $s_1$ と $s_2$ の積 $s_1 s_2$ を写像の合成 $s_1 \circ s_2$ として定義する方法である．合成 $s_1 \circ s_2$ は，最初に変換 $s_2$ を施し，次に変換 $s_1$ を施すものである．この定義より，次を得る．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

もう 1 つの定義の仕方は，$s_1$ を施してから，$s_2$ を施すものである．この具体例は，さきほどみた問題 34 における swich の直列接続である．

数学者には 2 つの流派があって，置換の積を $s_1 \circ s_2$ と定義する流派と，$s_2 \circ s_1$ と定義するべきだとする流派とに分かれる．$S_n$ の積表は，その積の

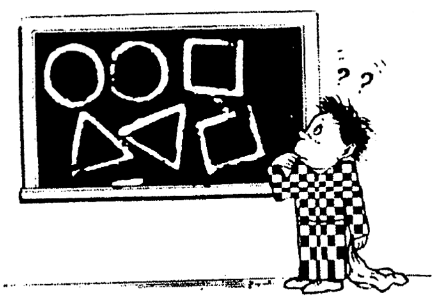
定義の仕方により異なるが，主対角線に関する対称変換によってうつり合うから，あまり見た目に違いはない．のちに，この2つの定義からそれぞれ導かれる置換群は，実は同型であることを説明する．

次の練習では様々な群が現れる．

**練習 73.** 黒板にいくつかの円，四角形，三角形が描かれている．次のルールで，そのなかの2つの図を消して，1つの図で置き換えることにする：

- 2つの円 ⟶1つの三角形.
- 2つの四角形 ⟶ 2つの三角形.
- 2つの三角形 ⟶ 1つの四角形.
- 1つの円と1つの四角形 ⟶ 1つの四角形.
- 1つの円と1つの三角形 ⟶ 1つの三角形.
- 1つの四角形と1つの三角形 ⟶ 1つの円.

このとき，最後に残る絵は，置き換えの順序によらず1つに決まることを証明せよ．



**練習 74.** $A, B$ を1変数の有理式，すなわち，実数係数の $x$ 変数多項式を分母子にもつ分数式とし，合成 $A * B$ を，$A$ の変数 $x$ に $B$ を代

入することによって得られる有理式とする．$A_1 = 1-x$, $A_2 = 1/x$ としたとき，集合 $\Phi = \{A_i * A_j | i = 1, 2\}$ は群をなすことを証明せよ．また，その位数とすべての元を求めて，積表を作れ．

**練習 75.** 定数でない有理式 $B$ で，$B * A_1 = B * A_2 = B$ をみたすものを求めよ．ただし，$A_1 = 1-x, A_2 = 1/x$ とする．

## §4.2 同型

問題 34 を解くとき，2 つの演算 (直列接続と変換の合成) が同じ内部構造であることから，直列接続の性質を変換の合成の性質から推測した．このような状態を特徴づけるのにちょうど良い概念が，同型である．

**定義 14** 群 $G$ と群 $H$ の元どうしの間に，$g_1 \leftrightarrow h_1, g_2 \leftrightarrow h_2$ ならば，$g_1 g_2 \leftrightarrow h_1 h_2$ となるような 1 対 1 対応 ($\leftrightarrow$ と表す) が存在するとき，$G$ と $H$ は**同型**であるという．また，この対応は，2 つの群の演算に**適合している**という．

同型の定義をもっと正確に述べると，次のようになる：$G$ の任意の元 $g_1$, $g_2$ に対して，次のような 1 対 1 対応 $\varphi : G \to H$ が存在するとき，$G$ と $H$ は同型であるという．すなわち，$G$ の任意の元 $g_1$, $g_2$ に対して次の式が成り立つ．

$$\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) \tag{4.2}$$

写像 $\varphi$ を $G$ から $H$ への 1 対 1 上への**同型写像**という．

一見，後者の定義は，前者の定義と異なっているようにみえる．なぜならば，その 2 つの群は対称的に登場していないからである．しかし，実は，2 つの群は平等な権利をもつ．なぜなら，$\varphi$ が $G$ から $H$ への上への同型写像であるとすると，$\varphi^{-1}$ は，$H$ から $G$ への上への同型写像になるからである．実際，$h_1 = \varphi(g_1), h_2 = \varphi(g_2)$ とすると，(4.2) 式の両辺に $\varphi^{-1}$ をかけることによって，$\varphi^{-1}(h_1)\varphi^{-1}(h_2) = \varphi^{-1}(h_1 h_2)$ となる．

とくに，有限群において，同型写像を作る一番直接的な方法は，対応する元の組をすべてはっきりと示すことである．そして，元を対応する元で置き換えてできた表が，もう一方の群の積表になっているかどうかを確認する．もちろん，与えられた表と，二番目の群の積表とを厳密に一致させるために

は，行と列を交換する必要があるかもしれない．問題 34 では，この手続きをとった．

**練習 76.** 3-swiches の群と正三角形の対称群 $D_3$ の元どうしの間の次の対応は，同型であるかを確かめよ： $\mathrm{id} \leftrightarrow P_1$, $R_2 \leftrightarrow P_2$, $R \leftrightarrow P_3$, $S_b \leftrightarrow P_4$, $S_c \leftrightarrow P_5$, $S_a \leftrightarrow P_6$.

練習 77 は次の重要な結果を導く．

**『群 $G$ と群 $H$ が同型であるとき，同型写像 $\phi : G \to H$ は一般に一意的ではない．とくに，群からそれ自身への，恒等写像以外の同型写像が存在する．』**

**練習 77.** $D_3$ から $D_3$ への同型写像をすべて求めよ．

熱心な読者は，いままでにでてきた群どうしに類似した性質があることに気づいただろう．この類似性を明確な問題として述べてみよう．

**練習 78.** 固定された極上 (p. 8 参照) の足し算を演算とする平面上の点全体の集合は，平面ベクトルの加群に同型な群を形成することを証明せよ．また，点 (またはベクトル) にある座標系の座標点を対応させると，次に定義された演算をもつ実数の組に同型であることを証明せよ．

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

**練習 79.** 問題 7 (p. 22) で述べられた積に関して正六角形の頂点の集合は，$C_6$ に同型な巡回群をなすことを証明せよ．ただし，$C_6$ は，1 点を中心とする $60n°$ の回転の群である．

**練習 80.** 練習 74 で定義された演算に関して，集合 { 円，三角形，四角形 } は巡回群 $C_3$ と同型であることを証明せよ．この 2 つの群の間に，異なる同型写像はいくつあるか．

**練習 81.** 練習 74 で定義された有理式の群は，二面体群 $D_3$ と同型であることを証明せよ．

練習 80，練習 81 の結果は，次のように一般化される．

**『同じ位数の巡回群は同型である．』**

事実，$G$ と $H$ を同じ位数の巡回群とし，$g, h$ をそれぞれ $G, H$ の生成元とすると，写像 $\varphi : G \to H$ を $\varphi(g^k) = h^k$ と定義することによって，指数積の法則 (4.1) がどちらの群においても成立するから，次のように $\varphi$ は同型写像であることがわかる．

$$\varphi(g^k g^l) = \varphi(g^{k+l}) = h^{k+l} = h^k h^l = \varphi(g^k)\varphi(g^l)$$

さらに，巡回群と同型な群は巡回群である．なぜならば，同型写像によって生成元をうつすと，また生成元になるからである．

もし，群の内部構造に興味があるなら，その群の元の意味は忘れて，その演算の性質だけに注意すればよい．

**定義 15** 抽象群とは，同型な群全体の集合族である．

たとえば，回転群 $C_n$ あるいは 1 の複素 $n$ 乗根の群のような，位数 $n$ の巡回群はすべて，位数 $n$ の同じ 1 つの抽象群の代表元，あるいは仏教の言葉で**化身**である．同じように，二面体群 $D_3$，置換群 $S_3$，スイッチの群 (問題 34)，有理式の群 (練習 74) はすべて同じ 1 つの抽象群の代表元である．のちに，与えられた構造 (生成元の関係式の集合) から抽象群をどのように定義すればよいかを説明する (p.125)

今度は，次のような一般的な問題を考えよう：「2 つの群が同型かどうか決定せよ.」 ふつう，2 つの群が同型であることを証明するほうが，同型ではないことを証明するより骨が折れる．なぜなら，前者の場合，通常，同型写像を構成しなければならないが，後者の場合は，同型写像によって保存されなければならない性質の中で，この 2 つの群で異なるものをみつければ十分だからである．ここで，2 つの群が同型であるための必要条件をいくつか述べよう：

1. **群の位数** 位数が異なる群は同型ではない．

**練習 82.** 足し算を演算とする整数全体の群は，足し算を演算とする偶数全体の群に同型か．

2. **可換性**　可換群は可換でない群に同型ではない.

3. **巡回性**　巡回群は巡回でない群に同型ではない.

**練習 83.**　次のリストのなかで，同型な群はどれとどれか．$C_1, D_1, C_2, D_2, C_3, D_3, \ldots$.

4. **元の位数**　一方の群における位数 $n$ の元の個数は，もう一方の群における位数 $n$ の元の個数に等しくなければならない．なぜならば，同型写像によって対応している元の位数はそれぞれ等しいからである.

多少難かしそうな最後の「元の位数」についてのみ証明しよう.

まず注意してほしいのは，同型写像においては，群の単位元どうしが対応することである．実際，$e$ を $G$ の単位元とし，$\varphi : G \to H$ を同型写像とすると，$ee = e$ より，$\varphi(ee) = \varphi(e)\varphi(e) = \varphi(e)$ である．ゆえに，$\varphi(e) = e'$．ここで，$e'$ は $H$ の単位元である．次に，$g$ を位数 $n$ の $G$ の元とする．すなわち $g^n = e$ である．よって，$\varphi(g^n) = \varphi(g)^n = e'$．つまり，$h = \varphi(g)$ の位数は $n$ 以下である．同じように逆関数を用いると，$g$ の位数は $h$ の位数以下であることがわかる．ゆえに，$g$ と $h$ の位数は等しい.

たとえば，$C_6$ と $D_3$ を区別するためには，2, 3, 4 のどの基準を用いてもよい．基準 2 については，$C_6$ は可換で $D_3$ は非可換である．基準 3 については，$C_6$ は巡回群であるが，$D_3$ は巡回群ではない．基準 4 については，$C_6$ においては，位数 1 の元が 1 つ，位数 2 の元が 1 つ，位数 3 の元が 2 つ，位数 6 の元が 2 つである．一方，$D_3$ においては，位数 1 の元が 1 つ，位数 2 の元が 3 つ，位数 3 の元が 2 つである.

2 つの群が同型になるための必要な性質は実質的には無数にある．なぜなら，その群の元の特別な性質以外にも，群の演算に関して公式化される性質は無数にあるからだ．しかし，基準 1〜4 によって，同型であるかないかの問題は，半分以上解決できるだろう．さて，$G$ と $H$ を与えられた群とし，$G$ と $H$ を区別できる性質がみつけられないと仮定しよう．このとき，$G$ と $H$ は同型であると予想される．この予想を証明するのに，$G$ と $H$ の間の同型写像 $\varphi : G \to H$ を構成しなければならない．どのようにしてこの同型写像を構成すればよいか.

$e$, $e'$ をそれぞれ $G$, $H$ の単位元とすると，$\varphi(e) = e'$ であることをまず思いだしていただきたい．さらに，ある適当な元 $g \in G$, $h \in H$ に対して，$\varphi(g) = h$ となるとき，等式 (4.2) を繰り返し適用することによって，任意の自然数 $k$ に対して $\varphi(g^k) = h^k$ であることが導かれる．

**練習 84.** 等式 $\varphi(g^k) = h^k$ $(k < 0)$ を証明せよ．

このように，写像 $\varphi$ による $g \in G$ の像が定義されているとき，$\varphi$ は $g$ によって生成される部分群全体で一意的に定義される．同じように，いくつかの元 $g_1, \ldots, g_n \in G$ の像がわかっていたら，$g_1, \ldots, g_n$ によって表現できる任意の元の像を一意的に決めることができる．もし，$g_1, \ldots, g_n$ が $G$ の生成元であるならば，$\varphi(g_1) = h_1, \ldots, \varphi(g_n) = h_n$ は，$\varphi$ を完全に決定することができる．生成元が 2 個 ($g_1$ と $g_2$) の場合，$\varphi$ は次のように決まる．

$$\varphi(g_1^{k_1} g_2^{l_1} \cdots g_1^{k_s} g_2^{l_s}) = h_1^{k_1} h_2^{l_1} \cdots h_1^{k_s} h_2^{l_s} \tag{4.3}$$

したがって，$G$ が $g_1$ と $g_2$ によって生成されるとき，同型写像 $\varphi : G \to H$ を構成するには，$\varphi(g_1) = h_1$, $\varphi(g_2) = h_2$ を定義し，関係式 (4.3) を用いて $\varphi$ による $G$ のすべての元の像を定義すればよい．しかし，どのようにして $h_1$ と $h_2$ をえらべばよいか？ $h_1$ と $h_2$ は $H$ の生成元で，それらの位数はそれぞれ $g_1$, $g_2$ の位数に等しくなければならない．また，$g_1$ と $g_2$ がみたす関係式をすべてみたさなければならない．たとえば，$g_1^2 g_2^3 = e$ であるとき，$h_1^2 h_2^3 = e'$ でなければならない．しかし，これらの主張からは，同型写像 $\varphi$ の候補者を推測できるだけである．だから，写像 $\varphi$ が作られたら，$\varphi$ が本当に同型写像かどうか確かめなければならない．

**問題 35** $e = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2i}$ ($e^3 = 1$ に注意)，$F_1(z) = ez, F_2(z) = \bar{z}$ とする．このとき，$F_1, F_2$ を繰り返し合成することにより得られる関数すべての集合は，二面体群 $D_3$ と同型な群をなすことを証明せよ．

**解答．** 次のことが得られる：

$$\begin{aligned}
F_3(z) &= F_1(F_2(z)) = F_1(\bar{z}) = e\bar{z}\\
F_4(z) &= F_2(F_2(z)) = F_2(\bar{z}) = z\\
F_5(z) &= F_1(F_1(z)) = F_1(ez) = e^2 z\\
F_6(z) &= F_2(F_1(z)) = F_2(ez) = \bar{ez} = e^2\bar{z}
\end{aligned}$$

容易に確かめられるように，これらの式に，さらに，$F_1$, $F_2$ をどのように合成したとしても，これらの関係式以外はでてこない．したがって，6 つの関数 $F_1,\ldots,F_6$ の集合は，合成のもとで閉じている．このリストの任意の関数の逆関数もまた，このリストに属する．このことは，その集合が群をなすことを示している．単位元は恒等写像 $F_4$ で，関数 $F_2, F_3, F_6$ の位数は 2，関数 $F_1, F_5$ の位数は 3 である．$F_1(F_2(z)) = F_3(z)$, $F_2(F_1(z) = F_6(z)$ より，この群は可換ではないことがわかる．これらのことを考えると，$G$ は $D_3$ に同型らしいことが推測できる．

同型写像 $\varphi : G \to D_3$ を構成するとき，$G$ は定義より，2 つの生成元 $F_1$(位数 3), $F_2$(位数 2) をもつことに注意しよう．$D_3$ においても，位数が 3 と 2 の 2 つの生成元をみつけられる．それは，回転と対称変換である．たとえば，$F_1 \leftrightarrow R$, $F_2 \leftrightarrow S_a$ (p. 83 の記号を用いて) とする．このとき，$F_3 \leftrightarrow S_c$, $F_4 \leftrightarrow \mathrm{id}$, $F_5 \leftrightarrow R^2$, $F_6 \leftrightarrow S_b$ である．$D_3$ の積表において，その対応する $G$ の元で $D_3$ のすべての元を置き換えると，次の表を得る．

| | $F_4$ | $F_1$ | $F_5$ | $F_2$ | $F_6$ | $F_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_4$ | $F_4$ | $F_1$ | $F_5$ | $F_2$ | $F_6$ | $F_3$ |
| $F_1$ | $F_1$ | $F_5$ | $F_4$ | $F_6$ | $F_3$ | $F_2$ |
| $F_5$ | $F_5$ | $F_4$ | $F_1$ | $F_3$ | $F_2$ | $F_6$ |
| $F_2$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_6$ | $F_4$ | $F_5$ | $F_1$ |
| $F_6$ | $F_6$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_1$ | $F_4$ | $F_5$ |
| $F_3$ | $F_3$ | $F_6$ | $F_2$ | $F_5$ | $F_1$ | $F_4$ |

容易に確かめられるように，この表は $G$ に対する積表である．

同型写像はこのようにして作られる．しかし，問題の 2 つの群の間の同型写像をみつけるもっと自然な方法がある．実は，平面変換の解析的な表現である複素関数を思いだすとよい．とくに，関数 $F_1(z) = ez$ は 0 の回りの 120° 回転に対応し，関数 $F_2(z) = \bar{z}$ は，実数軸 (図 4.2 の軸 $a$) に関する対称変換に対応している．

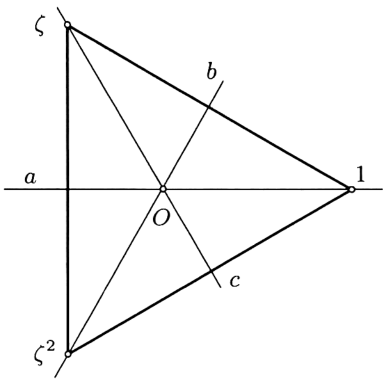



図 4.2　複素数平面上の正三角形

よって，$F_1, F_2$ の重ね合わせによって得られる任意の関数に，平面変換を対応させば，群の同型写像を得る．

後者の方法で構成された同型写像を**自然な同型写像**という．自然な同型写像は，2 つの群がなぜ同型なのかを視覚的に示している．

**練習 85.** 次の 2 つの群の間の自然な同型写像を求めよ：

(1) (問題 34)3-スウィッチの群と $D_3$.

(2) 練習 76 における有理式の群と $D_3$.

いま述べている自然さとは，決して厳密な数学的概念ではなく，むしろ，発見を助ける性質の概念である．ある意味では，どのような同型写像も自然であるが，なぜそれが自然なのかを理解するためには，しばしば，特別な数学

の定理を展開しなければならない．自然な同型写像を追求すれば，なぜ同じものが数学の異なる分野に現れてくるのかがわかるだろう．そうすることは，知識の発展を促進する強力な原動力となる．

同型の概念は，数学のみならず，思考するどのような分野においても重要であるからあえて「知識」という一般的な言葉を用いた．「同型」の一般的な意味を理解するため，次のような史上の例を考えてもらいたい．

1970年に，モスクワにおけるゲルファントの通信教育数学学校の入学試験に出題された問題のうちの1題は，異なる形式で有名な2つの雑誌によって発表された．1つの雑誌には，この問題は次のように記述された．

『M市において，3人のギャング，アーチー，ボス，ウェスリーのうちの1人が，お金の入ったバッグを盗んだ．彼らはそれぞれ3つの供述をした．

- アーチー：
  - わたしは盗んでいない．
  - その日，わたしはその町にいなかった．
  - ウェスリーが盗んだにちがいない．
- ボス：
  - ウェスリーが盗んだのだと思う．
  - わたしが，そのバッグを盗んだとしても，盗んだとは供述しない．
  - わたしはお金を沢山もっている．
- ウェスリー：
  - わたしは盗んでいない．
  - 上等のバッグをずっと捜している．
  - アーチーが，その日，この町にいなかったのは正しい．

その取り調べの間に，3人の供述のそれぞれのうち，2つは正しく，1つは誤りだということがわかった．では，一体，誰がバッグを盗んだのだろうか？』

別の雑誌では，次のような問題を掲載した．

『王は，だれが冷酷な大蛇を退治したのかを知りたかった．王は，それが怪力をもつ勇者，イリヤ，ドブリニャ，アリョーシャ[1]の3人のうちの1人

[1] この3人はいずれもロシア民話に出てくる人物で，フルネームはそれぞれ Ilya Muromets, Dobrynia Nikitich, Alyosha Popovich である．

であることを知っていた．その3人は王に出廷を命ぜられ，それぞれ3つの供述をした．

- イリヤ：
  - わたしは大蛇を退治しておりません．
  - その日，わたしは国外を旅しておりました．
  - 退治したのはアリョーシャです．
- ドブリニャ：
  - 退治したのはアリョーシャです．
  - わたしが退治したとしても，退治したとは申しません．
  - 邪悪な精神がいまだに生きています．
- アリョーシャ：
  - わたしは大蛇を退治しておりません．
  - わたしはずっと何かよいことをしたいと思っていました．
  - イリヤが国外を旅していたのは本当です．

王は3人それぞれが本当のことを2度言い，1度だけうそを言っていることがわかった．それでは，一体だれがその大蛇を退治したのか？』

2つの問題を比べてみると，あちこち異なる箇所があるが，論理的な構造は同じであることがわかる．次の表は，2つの問題における対応する名前，物，行為を表している：

| | |
|---|---|
| アーチー | イリヤ |
| ボス | ドブリニャ |
| ウェスリー | アリョーシャ |
| バッグ | 大蛇 |
| 盗む | 退治する |
| 町にいなかった | 国外を旅していた |

最初の問題の名前を，上の表の右側のもので置き換えると，その問題は，6番目の供述以外は2番目の問題の文章とほぼ同じものになる．しかし，実際には，6番目の供述は問題の答えに影響はないから，この意味で，この2つの問題は同型であるといえる．

この同型写像は次のように利用できる．最初の問題が解けて，答えが‘ボス’だとわかったら，2番目の問題を解く必要はない．なぜならば，上の表において，ボスに対応する名前が，正しい答えだからである．すなわち，答えは‘ドブリニャ’である．

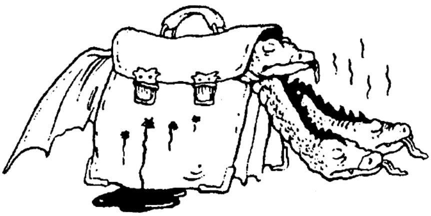


図 4.3　同型写像

同じように，群の同型写像を次のようにも利用できる．すなわち，$G$ と $H$ が同型であるとき，$G$ の演算に関して成り立つすべての主張が $H$ の演算でも成り立つ．

群の同型写像によるもっと簡単な応用例は，元の積の計算である．もし，ある群において，積の計算があまり難しくなく，手間のかからないものであるとき，その積を用いて，別の同型な群の元の積を計算することができる．もっと正確に言うと，$\varphi : G \to H$ が，群 $(G, *)$ と群 $(H, \circ)$ との間の同型写像であるならば，積 $*$ は，次の式によって計算できる．

$$g_1 * g_2 = \varphi^{-1}(\varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)) \tag{4.4}$$

この種の古典的な計算例は，ネイピアによって17世紀初頭に発見された対数[2]による計算である．彼は，数の積を簡単な演算–加法–で置き換えようとした．$x$ の十進法の対数を $\log_{10} x$ と表すと，次の等式が成り立つ．

$$x_1 x_2 = 10^{\log_{10} x_1 + \log_{10} x_2} \tag{4.5}$$

この式は，一般的な関係式 4.4 の具体的な例である．対数をベースに計算できる同型写像の例は $\log_{10} : (\mathbb{R}_+, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$ である (積の演算における正

[2] ネイピアによる対数とは，ある定数 $A$, $B$ をもつ関数 $y = A \log_{10} x + B$ である．現在の意味の対数は，ネイピアの弟子ブリッグズが導入した．また，彼は常用対数表を作った．

の実数の群から加法の演算における実数全体の群への上への写像). 対数関数の 2 つの基本的性質を述べておこう：

1. 集合 $R_+$ 上で定義される 1 対 1 写像である.
2. 恒等式
$$\log_{10}(x_1x_2) = \log_{10} x_1 + \log_{10} x_2$$
が成り立つ.

したがって, 対数関数は, 群 $(R_+, \cdot)$ と群 $(R, +)$ の間の同型写像である.

**練習 86.**

1. 十進法の対数 $y = \log_{10} x$ を ネイピア関数 $y = A\log_{10} x + B$ で置き換えるとき, (4.5) 式に代わる式を求めよ.
2. ネイピア関数が, $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ から $(\mathbb{R}, *)$ への上への同型写像となるように演算 $*$ を求めよ.

練習 86 の 2 は, いわゆる**構造の変換写像**の具体的な例である. ここで, この意味を説明しよう.

$G$ を $\triangle$ を演算とする群とし, $H$ を演算がないただの集合とする. 1 対 1 写像 $\varphi : H \to G$ が与えられていると仮定すると, このとき, 次の式を用いて, $\varphi$ による $G$ の演算から $H$ の演算を定義することができる.

$$h_1 \bigtriangledown h_2 = \varphi^{-1}(\varphi(h_1) \triangle \varphi(h_2))$$

実際この方法を以前に使った：

- ベクトルの加法から点の加法を導くとき (第 1 章).
- 実数上に, 群の演算を $x * y = x + y - 1$ と定義したとき (問題 33). この演算は, 写像 $\varphi(x) = x - 1$ によって, $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ へうつされるふつうの加法から得られる. なぜならば, $x * y = \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(y)) = (x-1) + (y-1) + 1 = x + y - 1$ だからである.

練習 71 の演算 $x * y = \dfrac{x+y}{1-xy}$ も同様に得られる. 写像 $\varphi(x) = \tan x$ を用いて, 群構造 $(\mathbb{R}, +)$ を変換しようとしても, この写像は 1 対 1 対応ではな

いのでうまくいかない．けれども，加群でしかも $M$ 上の点での正接の値がすべて異なるという性質をもつ任意の集合 $M \in \mathbb{R}$ に対して，$\varphi(x), x \in M$ の集合は，演算 $*$ に関して群をなす．

**練習 87.** 次のことを証明せよ：

1. このような集合 $M$ として，$\pi$ の有理数倍でない実数 $\alpha$ の整数倍の集合 $\{0, \pm\alpha, \pm 2\alpha, \ldots\}$ をとることができる．
2. この性質をもつ集合 $M$ は，実数軸のどのような開区間も含まない．

**練習 88.**

1. 写像 $y = x^3$ による加法の変換によって，結果として，実数上のどのような演算となるか．
2. 演算 $x * y = xy - x - y + 2$(練習 71) は，どのようにして得られたか．

構造の変換関数の言葉で，同型写像の概念は，次のように述べられる．写像 $\varphi$ によって，群 $G$ からうつされる群 $H$ の演算が $G$ の演算と一致するとき，写像 $\varphi: G \to H$ を，$G$ と $H$ の**同型写像**という．

## §4.3　ラグランジュの定理

この節では，群論におけるまさにその最初の定理を述べ，証明する．この定理はフランスの有名な数学者ラグランジュによって，18 世紀末発見された．その後 19 世紀，さらに群の概念はガロアによって系統的に数学に導入された．

**定理 7 (ラグランジュ)** 有限群 $G$ の任意の部分群の位数は，$G$ の位数の約数である．

群の任意の元は，その元の位数と等しい位数の巡回部分群を生成するから，とくに，**有限群の位数は任意の元の位数でつねに割り切れることがわかる．**

いままでにでてきた例 (群 $C_{12}$, $D_3$ など) で，すでにこの法則に気づいた人もいるかもしれない．一般の設定で，ラグランジュの定理を証明するため

には，群の部分群による**剰余類分解**を用いなければならない．

**証明** $G$ を位数 $n$ の群とし，$H$ を位数 $m$ の $G$ の部分群とする：$H = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$．任意の部分群には単位元が存在するから，$h_1 = e$ と仮定する．

任意の元 $g \in G - H$ に対して，次の集合を考える．

$$gH = \{gh_1, gh_2, \ldots, gh_m\}$$

集合 $gH$ を $H$ による $G$ の**右剰余類**[3]という．$gH$ には，次の 2 つの性質がある：

1. $|gH| = |H|$
2. $gH \cap g = \emptyset$

**1 の証明** $gh_1, \ldots, gh_m$ がすべて異なることを示さなければならないが，実は $gh_i = gh_k$ ならば，両辺に左から $g^{-1}$ をかけることによって $h_i = h_k$ となるから，これは正しい．

**2 の証明** $gH \cap H \neq \emptyset$ と仮定する．$h_i \in gH \cap H$ とすると，このときある元 $h_k \in H$ が存在し $h_i = gh_k$ となる．この式の両辺に右から $h_k^{-1}$ をかけると，$g = h_i h_k^{-1}$ となる．よって，$g \in H$ となり，これは $g$ のとり方 (定義) に矛盾する．ゆえに，$gH \cap H = \emptyset$．

性質 2 は，次のように一般化される．

『$g_2 \in G - g_1H$ ならば，$g_1H \cap g_2H = \emptyset$.』

言い換えると，次のようになる．

**『任意の $g_1H$, $g_2H$ に対して，$g_1H = g_2H$ または $g_1H \cap g_2H = \emptyset$ のどちらかが成り立つ.』**

事実，$g_1H \cap g_2H \neq \emptyset$ とすると，ある元 $h_i, h_k \in H$ が存在し，$g_1h_i = g_2h_k$ となる．ゆえに，$g_2 = g_1h_ih_k^{-1}$．$h_ih_k^{-1} \in H$ より，これは $g_2 \in g_1H$ を意味する．よって，$g_2H \subset g_1H$ である．同様のことが，$g_1$ に対しても成り立

3 ［訳注］左剰余類と呼ぶ本もある．

つから，$g_2H = g_1H$ であることがわかる．

さて，$G$ を $H$ による右剰余類に分解するプロセスを述べよう．$H = G$ ならば，その剰余類分解は，1 つの集合 $H$ だけからなる．$H \neq G$ ならば，元 $g_1 \notin G - H$ をえらび，剰余類 $g_1H$ を考える．$H \cup g_1H = G$ ならば，そのプロセスは終わりである．$H \cup g_1H \neq G$ ならば，$g_2 \in G - (H \cup g_1H)$ をえらぶ．このように，対ごとに素な 3 つの剰余類 $H, g_1H, g_2H$ が得られる．$G$ が有限群ならば，このプロセスは遅かれ早かれ終わり，次のような分解を得る．

$$G = H \cup g_1H \cup g_2H \cap \cdots \cap g_kH$$

ただし，$|H| = |g_iH| = m$, $g_iH \cap H = g_iH \cap g_jH = \emptyset$ $(i \neq j)$ である．

したがって，$G$ の元の個数 $n$ は，$H$ の元の個数 $m$ で割り切れる．よって，定理は証明された．　□

式 $G = H \cup g_1H \cup g_2H \cup \cdots \cup g_kH$ を $G$ の $H$ による**右剰余類分解**という．

左剰余類分解もまた，右剰余類分解と同じように考えることができる．一般に，これらの 2 つの分解は一致しない．このことについては，次の章で述べよう．

図 4.4，図 4.5 はそれぞれ，位数 3 と 2 の部分群による $D_3$ の右剰余類分解を示している．

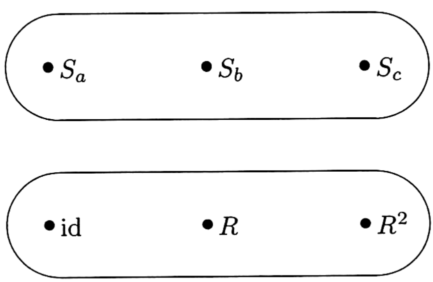



図 4.4　$D_3$ の剰余類分解その 1

**練習 89.**　$D_3$ のすべての部分群を求めよ．

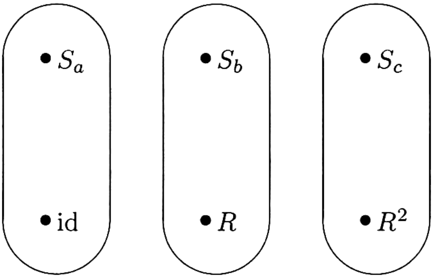



図 4.5 $D_3$ の剰余類分解その 2

ラグランジュの定理は，次の重要な事柄を導く．

**問題 36** 素数位数の有限群は巡回群であることを証明せよ．

**解答.** $G$ を素数位数 $p$ の群とし，$g$ を単位元でない $G$ の任意の元とする．$g$ によって生成される $G$ の部分群を $H$ とすると，$H$ の位数は，2 以上である．なぜならば，$H$ は，単位元 $e$ と $g$ を含むからである．素数 $p$ の 1 より大きい約数は，$p$ だけである．よって，$H$ の位数は $p$ で，$H = G$ である．このように，$G$ は，1 つの元 $g$ で生成される．

問題 36 より，**素数位数の群は可換**であることがわかる．

群の定理の応用をいくつか述べよう (とくに，ラグランジュの定理を計算に用いる)．

整数論ででてくる一番簡単な群は，加法演算におけるすべての整数の集合 $\mathbb{Z}$ である．その群の演算は加法だから，累乗という代わりに，整数倍 (すなわち，与えられた元をそれ自身にひき続き足して得られる元) といおう．任意の整数は，1 との積 ($n = n \cdot 1$) で表されるから，$\mathbb{Z}$ は生成元が 1 の巡回群でもある．

**練習 90.** 群 $\mathbb{Z}$ に 1 以外の生成元は存在するか．

任意の群においてと同様に，$\mathbb{Z}$ においても，その任意の元 $n$ は部分群を生成する．その部分群は $n$ の倍数の集合で，$n\mathbb{Z}$ と表される．

**練習 91.** 群 $\mathbb{Z}$ の任意の部分群は，適当な $n$ で $n\mathbb{Z}$ と表されることを証明せよ．

練習の結果は，すでに数論においていろいろな場面に応用されている．例として，次の良く知られている事柄を証明しよう．

**『$a$ と $b$ が，互いに素な整数であるならば，ある整数 $x$ と $y$ が存在して，$ax+by=1$ となる．』**

実際，$H$ を $a$ と $b$ によって生成される $\mathbb{Z}$ の部分群とすると，定義から，$H=\{ax+by|x,y\in\mathbb{Z}\}$ と書ける (演算を表す記号として，加法の代わりに積を用いると，$H$ の元は $a^xb^y$ と書ける)．練習 92 より，自然数 $n$ で，$H=n\mathbb{Z}$ となるものが存在する．$H$ は，$a$ と $b$ を含むから，どちらも $n$ で割り切れなければならない．しかし，$a$ と $b$ は，互いに素な整数だから，結局 $n=1$ でなければならない．よって，数 1 は $H$ に属し，ある適当な整数 $x_1$, $x_2$ で $ax_1+bx_2=1$ となるものが存在する．

さて，ラグランジュの定理は，$\mathbb{Z}$ と $n\mathbb{Z}$ の組には適用できないことに注意しよう．なぜならば，$\mathbb{Z}$ と $n\mathbb{Z}$ は，どちらも無限群だからである．しかし，$n\mathbb{Z}$ による $\mathbb{Z}$ の剰余類分解をつくることは意味があり，剰余類やモジュラ形式の算術という重要な概念を導く．

たとえば，$n=3$ とする．部分群 $3\mathbb{Z}$(3 の倍数) のすべての元に 1 を足すと，この数の集まりは，3 で割ると余りが 1 の集合になる．同様に，2 をそれぞれの元に加えると，3 で割って余りが 2 の集合になる．3 で割ると 1 と 2 以外の余りはないから，整数全体の集合はこの 3 つの類に分類されることがわかる．これは $\mathbb{Z}$ の $3\mathbb{Z}$ による**剰余類分解**である．この分解を視覚的に表示したものは図 4.6 である．集合 $3\mathbb{Z}$, $3\mathbb{Z}+1$, $3\mathbb{Z}+2$ は，無限集合だから，その図ではいくつかの元だけが示されている．

$m\mathbb{Z}$ による $\mathbb{Z}$ の剰余類を **$m$ による剰余類**といい，$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ と表す．$m$ で割って余りが $k$ になる整数全体の類は，慣例的に $\bar{k}$ と表す．全体で，$m$ 個の剰余類がある：$\bar{0},\bar{1},\ldots,\overline{m-1}$．たとえば，3 を法とする剰余類は，次の 3 つの類がある：$\bar{0},\bar{1},\bar{2}$(図 4.6)．

その図をみると，2 つの数の和は，つねに 1 つの同じ類に属し，その類は，その 2 つの数がそれぞれ属している類によってのみ決まり，代表元のとり方

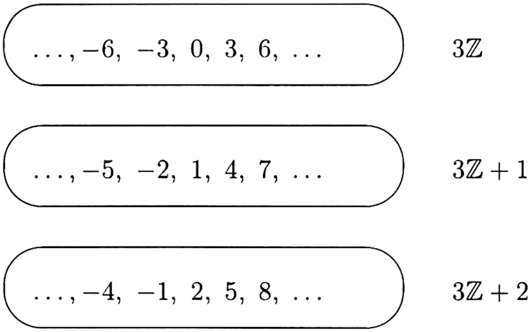



図 4.6　$3\mathbb{Z}$ による $\mathbb{Z}$ の剰余類分解

に依存しないことがわかる．たとえば，類 $\bar{1}$ から代表元 $1, -2, -7$ を，類 $\bar{2}$ から代表元 $-4, 5, 8$ をとるとすると，このとき，$1 + (-4) = -3, (-2) + 5 = 3, 7 + 8 = 15$ より，これらの和はすべて同じ類に属することがわかる．一般に，等式

$$(mx + k) + (my + l) = m(x + y) + k + l$$

は，$m$ による剰余類の和の演算 の定義である．すなわち，$\bar{k}$ と $\bar{l}$ の和は，$\bar{k}$ の代表元と，$\bar{l}$ の代表元のとり方に依存しない．たとえば，$m = 3$ ならば，3 を法とする剰余類の集合において，次の和の表を得る．

| $+$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ |
|---|---|---|---|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{2}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ |

上記の表から，3 を法とする剰余類は，位数 3 の巡回群であることがわかる．

**練習 92.**　任意の整数 $m$ に対して，$m$ による剰余類は，位数 $m$ の巡回群であることを証明せよ．

さて，次のことを考えてみよう．

「剰余類における和の定義と同じようにして，剰余類における積も定義することができるか？」 答えは「定義できる」である．

実際，任意の代表元 $mx+k \in \bar{k}, my+l \in \bar{l}$ に対して，$(mx+k)(my+l) = m(mxy+xl+ky)+kl$ となる．この値は，$m$ で割ると余りが $kl$ となる整数である．また，この余りは，代表元のとり方に依存しない．よって，この演算は剰余類の集合において，正しく定義されている．

次の表は，3 を法とする剰余類の集合の積表である．

| $\times$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ |
|---|---|---|---|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{1}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{1}$ |

明らかに，この積は群の公理をみたさない．なぜなら，この積表には要素がすべて 0 の列と行があるが，群の積表であれば列にも行にも同じ元は 2 つ以上ない．しかし，0 の列と行をこの表から除くと次のようになり

| $\times$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ |
|---|---|---|
| $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{2}$ | $\bar{1}$ |

この表に関しては，群の公理がみたされる —— これは位数 2 の巡回群を表している．

**練習 93.** 6 を法とするゼロでない剰余すべての集合は，乗法 (かけ算) に関して群をなすか．

練習 93 より，次のことを思いつくだろう．$m$ **によるの剰余類から，積を演算とする群をつくるためには，**$m$ **と互いに素な剰余だけをえらべばよい．** たとえば，$m=6$ ならば，6 と公約数 2 をもつ元 $\bar{4}$ は，$\bar{3}$ をかけることによって $\bar{0}$ になる．しかし，$\bar{0}$ は群に属さない．なぜならば，$\bar{0}$ は 0 だけを元とする列全体をつくってしまうからである．次の重要な事実を証明しよう．

**『$m$ を法とする剰余類 $\bar{k}$ のすべての集合は，積の演算に関して群をなす．ただし，$k$ は $m$ と互いに素な整数とする．』**

実際，2 つの整数が $m$ と互いに素であるなら，それらの積もまた $m$ と互いに素な整数となる．このことは，その演算がその与えられた集合で閉じていることを意味する．結合法則は，数のふつうの積の結合法則性から成り立つ．類 $\bar{1}$ は $m$ と互いに素で，単位元の役割をする．確認しなければならないただ 1 つの明らかでない性質は，その集合におけるすべての剰余類が逆元をもつことである．言い換えれば，$m$ と互いに素な任意の整数 $a$ に対して，$m$ と互いに素で $ax \equiv 1 (\mathrm{mod}\ m)$ となるような整数 $x$ が存在することである．最後の式は「$ax$ と 1 は $m$ を法として合同である」と読み，$ax$ は $m$ で割ると余りが 1 の整数であることと定義する．これは，次のように言い換えられる．**$ax + my = 1$ となる整数 $y$ が存在する．** この事実はすでに示した (練習 91 の系)．$x$ と $m$ は互いに素であることを示さなければならないが，これは明らかである．

**練習 94.** 6 を法とする 2 つの剰余類の集合 $\{\bar{2}, \bar{4}\}$ は，積に関して群をなすか．

任意の $m$ に対して，$m$ を法とする剰余類のうちの，$m$ と互いに素な整数の剰余類全体の積群を $\mathbb{Z}_m^*$ と表すことにする．$\mathbb{Z}_m^*$ の位数，すなわちこのような剰余類の総数を $m$ の**オイラー関数**といい，$\varphi(m)$ と表す (p. 80 参照)．次に，ラグランジュの定理の算術的な応用を述べよう．

任意の群 $G$ と $G$ の任意の元 $g$ に対して，等式 $g^m = e$ が成り立つことに注意しよう．ここで，$m$ は $G$ の位数，$e$ は単位元である．実際，$g$ の位数を $k$ とすると，ラグランジュの定理によって適当な整数 $l$ に対して，$m = kl$ となり，$g^m = (g^k)^l = e^l = e$ が成り立つ．

$G = \mathbb{Z}_m^*$ のとき，このことは次の定理を意味する．

**定理 8** **(オイラー)** $a$ が $m$ と互いに素な整数であるとき，

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ m)$$

が成り立つ．ここで，$\varphi(m)$ は $m$ のオイラー 関数である．すなわち，1 から $m$ までで $m$ と互いに素な整数の個数である．

$m = p$ が素数のとき，$\varphi(p) = p - 1$ であるから，オイラーの定理は次の定理となる．これは**フェルマーの小定理**として知られている．

**定理 9** $p$ が素数であるとき，$p$ で割り切れない任意の整数 $a$ に対して，

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \tag{4.6}$$

が成り立つ．

**歴史に関する備考：**フェルマーもオイラーも彼らの定理を証明するのに，系統的な群論による考察はしなかった．群論は 19 世紀の初めになってやっと，ガロアの仕事によって世に出たのであるが，フェルマーもオイラーも暗黙には群の理論，たとえば剰余類分解などを用いたにちがいない．フェルマーやオイラーの研究は，群論が産まれた要因の 1 つである．群論のいろいろな概念や定理を的確に適用することによって，算術的な事柄はもっと明確に解明され，そして更なる一般化へと発展するだろう．

この章の最後に，剰余やオイラーの定理によって解ける数論の初等的な問題をいくつかあげておく．

**練習 95.**　方程式 $x^2 = 3y^2 + 8$ をみたす整数解は存在しないことを証明せよ．

**練習 96.**　$2003^{2004}$ の十の位と一の位の数字を求めよ．

# 第5章
# 軌道と不変量

この章で触れる話題は，群の作用，軌道，不変量，そして，敷き詰め模様についてである．

定義から，変換群はある集合に作用する．たとえば，平面運動の群は，平面 (の点全体の集合) に作用する．置換群 $S_3$ は，集合 $\{1, 2, 3\}$ に作用する．$S_3$ はもともと変換群だったが，抽象的な群も何らかの集合に作用する変換群とみなすことができる．群の作用を正確に定義するためには，準同型写像の概念が必要である．

## §5.1　準同型写像

準同型写像の概念は，同型写像の概念の一般化である．同型写像と同様に準同型写像は，同じ演算を保存するという性質によって定義される．同型写像の定義と違うところは，1 対 1 である必要がないことだけである．

**定義 16** 群 $G$ から群 $H$ への写像 $\varphi : G \to H$ は，$G$ の任意の元 $a, b$ に対して，条件

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \tag{5.1}$$

をみたすとき，**準同型写像**といわれる (この群の演算は，ここでは積で表されているが，もちろん本当の積でなくてよい)．

**同型写像**は，1 対 1 の準同型写像である．同型写像の性質には，任意の準同型写像に一般化されるものもある．たとえば，準同型写像 $\varphi$ による $e \in G$ の像はつねに単位元 $e' \in H$ である：$\varphi(e) = e'$．また，任意の元 $g \in G$ に対して，次の等式が成り立つ．

$$\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1} \tag{5.2}$$

これら2つの等式は，(5.1) 式から容易に導かれる．

任意の2つの群 $G, H$ に対して，$G$ のすべての元を $H$ の単位元にうつす写像は，準同型写像である．これを**自明な準同型写像**という．$\varphi: G \to G'$ が同型写像で，$G'$ が $H$ の部分群であれば，$\varphi$ を $G$ から $H$ への写像とみなせる．それは，明らかに準同型写像である．このような準同型写像を**単射準同型写像**という．それは，$G$ の異なる2つの元が，$\varphi$ によって $H$ の異なる2つの元にうつされるという性質で特徴づけられる．

自明な準同型写像による群全体の像は，自明な部分群 (ただ1つの元からなる群) である．任意の準同型写像 $\varphi: G \to H$ による $G$ の像 $\varphi(G)$ は，$H$ の部分群であることに注意しよう．

準同型写像のなかで一番興味深いものは，単射準同型写像とある意味で双対な**全射準同型写像**である．準同型写像 $\varphi: G \to H$ は $\varphi(G) = H$ であるとき，すなわち，$H$ の任意の元が $G$ のある元の像であるとき，**全射**であるという．

全射準同型写像のいくつかの例を考えよう．

**問題 37** 加法を演算とする整数全体の群 $\mathbb{Z}$ から剰余類の群 $\mathbb{Z}_m$ への全射準同型写像を構成せよ．

**解答．** 答えは簡単である．つまり任意の整数 $a \in \mathbb{Z}$ を $m$ を法とする $a$ の類 $\overline{a}$ にうつす写像 $p$ が求める全射準同型写像である．$\mathbb{Z}_m$ の定義 (p.113 参照) より

$$p(a+b) = \overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b} = p(a) + p(b)$$

であるから，$p$ は足し算の演算を保存する．また明らかに全射である．積の演算も保存する，すなわち $p(ab) = p(a)p(b)$ であることに注意すると，$p$ は積の演算に関しても準同型写像となることがわかる (練習 95 参照)．

**練習 97．** どのような数 $m, n$ に対して，$\mathbb{Z}_m$ から $\mathbb{Z}_n$ への全射準同型写像は存在するか．

**問題 38** $S_4$ から $S_3$ への全射準同型写像を求めよ．

**解答．** $S_n$ は $n$ 個の元の置換群を表す (§4.1 参照)．たとえば，$S_4$ は濃度が 4 の集合の 24 個の置換からなり，$S_3$ は濃度が 3 の集合の 6 個の置換からなる．先にみたように (練習 74)，$S_3$ は，$1/x$ と $1-x$ によって生成される変換の群 $\Phi$ に同型である．したがって，$S_4$ から $\Phi$ への準同型写像を構成できればよい．これを次のように構成する．4 変数で表された式

$$x = \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d}$$

を考える．これを $a, b, c, d$ の**複比**とよぶ．この式において文字 $a, b, c, d$ を並べかえると，その複比の値も変わる．しかし，変化した複比の値はつねに $x$ だけで表される．たとえば，置換 $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$ (つまり $a \mapsto b$, $b \mapsto c$, $c \mapsto d$, $d \mapsto a$) をおこなった結果，上記の $x$ は $\frac{x}{x-1}$ となる．

$$\frac{b-d}{c-d} : \frac{b-a}{c-a} = \frac{x}{x-1}$$

**練習 98．** $x$ を先の複比とする．このとき，4 文字 $a, b, c, d$ の 24 個の置換の各々に対して，置換したあとの複比を初期値 $x$ を用いて表せ．

練習 98 を解いた読者は，求められた 6 つの関数の集合が以前でてきた関数の群 $\Phi$ であることを思いおこすだろう．置換 $\sigma$ に対応するこの有理関数を $f_\sigma(x)$ とする．$f : \sigma \mapsto f_\sigma$ が準同型写像であることを示すため，$f_{\tau\sigma} = f_\tau \circ f_\sigma$ であることを確かめなければならない．実際

$$f_\sigma(x) = \frac{\sigma(a)-\sigma(c)}{\sigma(b)-\sigma(c)} : \frac{\sigma(a)-\sigma(d)}{\sigma(b)-\sigma(d)} = y$$

とすると，明らかに次の式が成り立つ．

$$f_{\tau\sigma}(x) = \frac{\tau\sigma(a)-\tau\sigma(c)}{\tau\sigma(b)-\tau\sigma(c)} : \frac{\tau\sigma(a)-\tau\sigma(d)}{\tau\sigma(b)-\tau\sigma(d)} = f_\tau(y)$$

ゆえに，$f_{\tau\sigma}(x) = f_\tau(f_\sigma(x))$

さて，次の重要な性質に注目していただきたい．$f$ が準同形写像，すなわち関係式 $f_{\tau\sigma} = f_\tau \circ f_\sigma$ をみたす写像であることは，問題 38 に答えることを単純にしてくれる．なぜなら，$f$ による置換の像全体が集合 $\Phi$ に一致することを示すのに，練習 98 で述べられた 4 文字の 24 個の置換をすべて確かめる必要はないからである．3 つの置換 $a \leftrightarrow b, b \leftrightarrow c, c \leftrightarrow d$ は，$S_4$ を生成するから，これらの像だけを確かめればよい．これらの置換は，それぞれ関数 $1/x$, $1-x$, $1/x$ に対応する．すでにわかっているように，2 つの関数 $1/x$, $1-x$ は，群 $\Phi$ を生成する．

**練習 99.** 方向を保存するすべての運動に対して $+1$ を割り当て，方向を変えるすべての運動に対して $-1$ を割り当てるとする．このとき，この割り当ては，平面運動全体の群から，積を演算とする 2 つの元の集合 $\{+1, -1\}$ への全射準同型写像であることを確かめよ．

**問題 39** 真の平面運動全体の群 $G$ から絶対値が 1 の複素数全体の群 $T$ への全射準同型写像を求めよ．

**解答.** 任意の真の平面運動は，複素関数 $f(z) = pz + a\,(|p| = 1)$ として解析的に書ける (§2.3 参照)．この運動を数 $p$ に対応させる写像を考える．この写像が群どうしの準同型写像であることを確かめよう．実際，運動 $f$ と $g(z) = qz + b$ で定義される運動 $g$ との合成 $g \circ f$ は

$$g(f(z)) = q(pz + a) + b = qpz + (aq + b)$$

ゆえに，$\varphi(gf) = \varphi(g)\varphi(f)$.

いま証明した主張を幾何学的に解釈すると，2 つの回転 (回転の中心が異なるものでもいい) がかけられると，その 2 つの回転角は足されるということである．とくに，$R_A^{\varphi} \circ R_B^{-\varphi}$ は平行移動となる．

次の練習 100 は，次のことを用いるとよい．

「直線 $l$ と $m$ の間のなす角は，$R_A^{\varphi}(l)$ と $R_B^{\varphi}(m)$ とのなす角に等しい.」

実際，回転によって角度は保存されるから，$l$ と $m$ とのなす角は $R_A^{\varphi}(l)$ と $R_B^{\varphi}(m)$ とのなす角に等しい —— したがって，直線 $R_A^{\varphi}(m)$ と直線 $R_B^{\varphi}(m)$ は平行である.

**練習 100.** 三角形 $ABC$ の頂点 $B, C$ からおろした垂線の足をそれぞれ，$E, F$ とし，$O$ を三角形 $ABC$ の外心とする．このとき，線分 $AO$ と線分 $EF$ は垂直であることを証明せよ.

**練習 101.** 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の行列式は $ad - bc$ である．$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$ の積は，$\begin{pmatrix} am+bp & an+bq \\ cm+dp & cn+dq \end{pmatrix}$ である．行列式が 0 でない行列すべての集合は，この積を演算として群をなすことを証明せよ．また，行列式は，この群から積を演算とする 0 でない数の群への全射準同型写像であることを示せ.

## §5.2 商群

剰余類の群 $\mathbb{Z}_m$ と準同型写像 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$ をもっと一般的な視点からみてみよう．$Z_m$ は，$mZ$ を法とする $Z$ の剰余類で構成される．このことを「$Z_m$ は $mZ$ を法とする $Z$ の商群である」ともいい，$Z_m = Z/mZ$ と表す.

さて，$G$ を任意の群，$H$ を $G$ の部分群とする．$H$ を法とする $G$ の剰余類の集合を群にしてみよう．例として，$Z_m$ の作り方を用いる．まずおこる問題がある.「右剰余類 $eH, g_1H, g_2H, \ldots$ と左剰余類 $He, Hg_1, Hg_2, \ldots$ のどちらの剰余類を用いるべきか？」 $Z$ は可換だから，この問題は $Z$ に対してはおこらない.

右剰余類は $gH = \{gh|h \in H\}$，左剰余類は $Hg = \{hg|h \in H\}$ という集合である．$G$ が非可換で $g \in G - H$ ならば，一般に $gH \neq Hg$ である．たとえば，$G = D_3$, $H = \{\mathrm{id}, S_a\}$, $g = R \in D_3 - H$ とすると，$D_3$ の積表 (p.83 参照) から，次のことが求まる：

$$\begin{aligned} RH &= \{R \circ \mathrm{id}, R \circ S_a\} = \{R, S_b\} \\ HR &= \{\mathrm{id} \circ R, S_a \circ R\} = \{R, S_c\} \end{aligned}$$

しかし，$D_3$ の部分群 $C_3 = \{\mathrm{id}, R, R^2\}$ に対しては，$g$ として $D_3 - C_3$ の元をどのようにとっても，右剰余類分解と左剰余類分解は，同じ2つの剰余類 $C_3$ と $D_3 - C_3$ で構成される．

**定義 17** 群 $G$ の部分群 $H$ が正規であるとは，任意の元 $g \in G$ に対して，$gH = Hg$ であるときをいう．

$H \subset G$ が正規ならば，次の等式列が成り立つ．

$$(g_1H)(g_2H) = g_1(Hg_2)H = g_1(g_2H)H = g_1g_2H$$

これは，$g_1H$ と $g_2H$ からそれぞれ任意に1つずつ元をとると，それらの積が1つの同じ剰余類 $(g_1g_2)H$ に属することを意味する．よって，正規部分群を法とする剰余類の集合において，正しく定義された積が存在することになる．すなわち，$\bar{g_1}\bar{g_2} = \overline{g_1g_2}$．ただし，アルファベットの上のバーは，与えられた正規部分群による元の剰余類を表す: $\bar{g} = gH = Hg$．この演算は，明らかに結合法則をみたす．また，単位元の役割りは剰余類 $H = eH$ が果たし，$gH$ の逆元は $g^{-1}H$ である．このように，剰余類の集合 $H$, $g_1H$, $g_2H \cdots$ には，群の構造が入る．

**定義 18** $G$ を群，$H$ を $G$ の正規部分群とする．$G$ の $H$ を法とする商群とは，積 $\bar{g_1}\bar{g_2} = \overline{g_1g_2}$ を演算とする $H$ による剰余類全体の集合である．これを $G/H$ と表す．

商群 $G/H$ の構造は，$G$ の積表の上の横列と左の縦列を剰余類で並べかえることによって，読みとることができる．たとえば，$D_3$ の積表をみると(p.83)，すぐわかるように，その積表は1つのブロックが $3 \times 3$ のサイズの4つのブロックに分かれる．回転に対応するブロックを $R$，対称変換に対応するブロックを $S$ とすると，この表のブロック構造は次のようになる．

| | $R$ | $S$ |
|---|---|---|
| $R$ | $R$ | $R$ |
| $S$ | $S$ | $R$ |

この表は，$Z_2$ に同型な位数2の巡回群を表している．ゆえに，$D_3/C_3 \cong \mathbb{Z}_2$．ただし，$\cong$ は同型を表す記号である．

**問題 40** $G$ を真の平面運動全体の群，すなわち平面上の回転と移動全体の群，$N$ を固定点 $A$ の回りの回転全体で構成される $G$ の部分群，$K$ を移動全体で構成される $G$ の部分群とする．このとき，$N$ と $K$ は $G$ の正規部分群であるか．また，$N$ あるいは $K$ が，$G$ の正規部分群であるとき，その商群の構造を求めよ．

**解答．** 正規性の条件 $gH = Hg$ は $gHg^{-1} = H$ と書き換えられる．この式は，部分群 $H$ が正規である必要十分条件が，$H$ の任意の元に対するすべての共役化が $H$ に含まれることを意味する．共役化は別の視点 (p.74 参照) から物事をみることだから，どのような視点から部分群を見ても同じに見えるとき，その部分群は正規であることになる．平面に立っている人 (第 1 章参照) にとって，彼がどのような場所にいようとも，移動の集合はどれも同じに見える．しかし，固定された点 $A$ の回りの回転の集合は，$A$ の位置にいる人から見るのと，$A$ 以外の位置にいる人から見るのとでは異なって見える．したがって，$K$ は正規であるが $N$ は正規ではないことがわかる．

この事実は，練習 58 (p. 216 の表参照) を用いてもっと厳密に証明される．移動に共役な運動は移動である．したがって，$K$ は正規である．運動 $f$ による $A$ の回りの回転に共役な運動は，$f(A)$ の回りの回転である．したがって，$N$ は正規ではない．

$K \subset G$ は正規であるから，商群 $G/K$ が定義される．$G/K$ の構造を理解するために，問題 39 で議論した $G$ から $T$ への準同型写像を考えよう．この写像を $\varphi$ とする．$G$ の 2 つの元が $\varphi$ によって同じ元にうつるための必要十分条件は，その 2 つの元が $G$ の $K$ による同じ剰余類に属することである．実際，$\varphi(f) = \varphi(g) = p$ とすると，$p = 1$ のときは，$f, g$ は移動となるから $K$ に属することとなる．$p = \cos\alpha + i\sin\alpha \neq 1$ のときは，$f$ と $g$ はどちらも 角 $\alpha$ の回転になる．たとえば，$f = R_A^\alpha$, $g = R_B^\alpha$ とすると，$f = R_A^\alpha = R_B^\alpha \circ (R_B^{-\alpha} \circ R_A^\alpha) \in gK$．なぜならば，$R_B^{-\alpha} \circ R_A^\alpha$ は移動だからである．逆に，$f$ と $g$ が $K$ によるある剰余類に属するならば，$f = g \circ h$ であるから，$\varphi(f) = \varphi(g)$．

いま証明した性質は，$\varphi$ が集合 $G/K$ と集合 $T$ の間の 1 対 1 対応

をもたらすことも意味する．この1対1対応を $\bar{f}$ と表す．写像 $\bar{f}$ は明らかにその群の演算と適合しているので，同型 $\varphi : G/K \to T$ を与えている．商群 $G/K$ は絶対値が1の複素数全体の群，またはある点を中心とする回転全体の群に同型である．

$G$ の $K$ による剰余類分解には，次のような単純な幾何学的意味がある．すべての剰余類は，任意の点を中心とする同じ角の回転で構成されている． 部分群 $K$ 自身 (移動全体の集合) は，単位の剰余類である —— それは，$\varphi$ によって $T$ の単位元にうつる．

これらの議論を一般化すると，準同型第一定理になる．

**定理 10** (準同型第一定理) $\varphi$ が，群 $G$ から群 $H$ への全射準同型写像で，$K$ が $G$ の核，すなわち，$\varphi$ によって $H$ の単位元にうつる $G$ の集合であるならば，$G/K \cong H$ が成り立つ．

**証明** 任意の準同型写像 $\varphi$ の核 $K$ は，$G$ の正規部分群である．したがって，商群 $G/K$ は正しく定義されている．実際，$k \in K$ のとき，$f(k) = e$ だから，$f(gkg^{-1}) = f(g)f(k)f(g)^{-1} = f(g)ef(g)^{-1} = e$ である．ゆえに $gkg^{-1} \in K$． □

準同型第一定理により，$G, H, K$ の位数は，次の等式で関係づけられる．$|G| = |H| \cdot |K|$．とくに，次の系が導かれる．

『有限群 $G$ から有限群 $H$ への全射準同型写像が存在するとき，$H$ の位数は $G$ の位数の約数である.』

**練習 102.** (a) $D_3$ から $\mathbb{Z}_2$ への全射準同型写像は存在するか．(b) $\mathbb{Z}_3$ への全射準同型写像は存在するか．

**問題 41** 問題 38 の解答における準同型写像 $\varphi : S_4 \to \Phi$ の核を求めよ．

**解答.** $K \subset S_4$ を $\varphi$ の核とする．$\varphi$ は全射準同型写像，すなわちその像全体が群 $\Phi$ と一致するものであるから，2つの群 $S_4/K$ と

$\Phi$ は同型である．ゆえに，$|K| = 24 : 6 = 4$．容易に確かめられるように，次の 4 つの置換は，式 $x$ を $x$ のままにする置換である．

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$$

この 4 つの元に関する積表は，記号のえらび方を同じものとして，$D_2$ の積表と一致する．ゆえに，$K \cong D_2$．準同型定理から，$S_4/D_2 \cong D_3$ である．

**練習 103.** 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で構成される加群からそれ自身への準同型写像 $F(f(x)) \equiv f(x) + f(-x)$ の像と核を求めよ．

**練習 104.** $S$ をある固定された点を中心とする平面の回転群，$C_n$ を位数 $n$ の巡回部分群とする．このとき，$S/C_n \cong S$ であることを示せ．

**練習 105.** 準同型第一定理を用いて，練習 104 の群 $S$ を $(\mathbb{R}, +)$ のある商群として表せ．

## §5.3 生成元と関係式によって表示される群

この節では，与えられた生成元と関係式の集合をもつ抽象群の構成について説明する．第 3 章では (p.84), 与えられた群における生成元と関係式について話した．今度の問題はその逆である．すなわち，生成元とその間の関係式からなる任意の集合から群を**定義**したい．

この定義には，すでに学んだ商群とこれから定義する自由群が用いられる．

**定義 19** $S$ をアルファベットの文字からなる任意の集合とする．$S$ による自由群 $F(S)$ とは，$S$ 上のすべての単項式 (p.84 参照) からなる群で，演算は 2 つの単項式を並べ，簡約規則 $s^k s^l = s^{k+l}$, $s^0 = 1$ を用いることによって得られるものである．

たとえば，$S$ が 1 つの元からなるとき，$F(S)$ は無限巡回群となる．

**定義 20** $R$ を $S$ 上の単項式の集合とする (任意の単項式 $r$ は $S$ の元の間の関係式 $r=1$ と考える). 生成元 $S$ と関係式 $R$ をもつ群を, 商群 $F(S)/H(R)$ として定義する. ただし, $F(S)$ は $S$ 上の自由群, $H(R)$ は $R$ に属するすべての関係式を含む $F(S)$ の最小の正規部分群である (言い換えると, $H(R)$ は $R$ の元と共役なすべての元によって生成される $F(S)$ の部分群である).

生成元 $s_1,\ldots,s_n$ と, 関係式 $r_1,\ldots,r_m$ をもつ抽象群を

$$\langle\, s_1,\ldots,s_m \,|\, r_1,\ldots,r_m \,\rangle$$

と表す (右側の関係式は単に単項式 $r$ と書くこともある. この場合, 等式 $r=1$ を意味する).

たとえば, 容易にわかるように

$$\langle\, a \,|\, a^n = 1 \,\rangle$$

は位数 $n$ の巡回群を表す.

**問題 42**

$$\langle\, a, b \,|\, ab = 1 \,\rangle$$

によって表示される群は, 整数全体の加群 $\mathbb{Z}$ に同型な無限巡回群であることを証明せよ.

**解答.** 自由群 $F(a,b)$ は, 任意の長さで任意の整数巾指数のワード $a^{k_1}b^{l_1}\cdots a^{k_n}b^{l_n}$ 全体からなる. その商群を得るにはこのようなワードを部分群 $H(R)$ の元を法として考えなければならない. すなわち, $x=yh$ あるいは $x=hy$ $(h\in H(R))$ ならば, $x$ と $y$ は1つの同じ剰余類に属すると考える. ここで, $a=(ab)b^{-1}$ より, $a$ と $b^{-1}$ は同じ剰余類に属する. したがって, $a$ と $b$ で表された任意のワードは $b$ だけで表されたワードと同値である. このように, $F(S)/H(R)$ の任意の元は $\bar{b}$ のある累乗であることがわかる. よって, この群は巡回群である.

$H(R)$ の任意の元における, $a$ の指数すべての和は $b$ の指数すべての和と等しい. したがって, $b^n$ $(n\neq 0)$ は $H(R)$ の元ではありえない. これは, $\bar{b}$ のすべての累乗がすべて異なることを意味する. このように, $F(S)/H(R)$ は無限群となる.

注意：先の議論において，生成元 $a, b$ は対称的な役割を果たす．$ba$ は $ab$ に共役 (つまり，$ba = a^{-1}(ab)a$) だからである．したがって，$ba \in H(R)$ —— このような理由から定義 20 では，$H(R)$ を $R$ によって生成される正規部分群と設定している．

**練習 106.**

$$\langle a, b \mid a^2 = 1,\ b^n = 1,\ aba = b^{-1} \rangle$$

によって表示される群は何か．

**練習 107.**

$$\langle a, b \mid aba = bab \rangle \cong \langle x, y \mid x^2 = y^3 \rangle$$

を証明せよ．

## §5.4 群の作用と軌道

群の作用は，準同型写像に関して定義される．

**定義 21** $G$ を群，$X$ を集合とする．$X$ 上の $G$ による作用とは，$G$ から，$X$ の変換群 (p.68 参照) への準同型写像である．

$$T : G \to \mathrm{Tr}(X)$$

変換 $T_g$ による作用で，点 $x \in X$ は $T_g(x)$ にうつる．$T_g$ を略して $gx$ と表すこともある．

与えられた $G$ は，あらゆる違った方法で与えられた $X$ 上に作用できることを強調したい．なぜならば，一般に多くの異なる準同型写像 $G \to \mathrm{Tr}(X)$ があるからである．正三角形の対称群 $D_3$ は定義により平面に作用する．しかしその作用は，正三角形の選択，正確には中心と 3 本の対称軸の選択に依存する．図 5.1 は，中心が $O$，対称軸が $a, b, c$ の正三角形である．

$D_3$ のどのような元の作用によって原点 ($O$) をうつしても原点となる．また，直線 $a, b, c$ 上の点で原点以外のものは 3 つの異なる点 (自分自身を含む) にうつり，平面上の任意の他の点は，$D_3$ による作用で 6 つの異なる点にうつることがわかる．

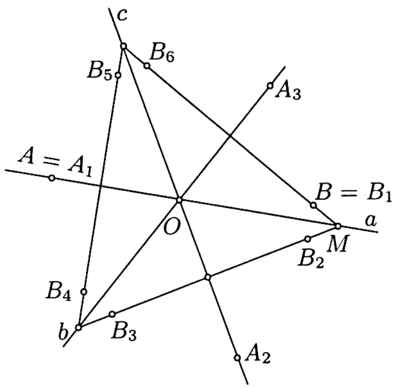



図 5.1　平面上の群 $D_3$ による作用

**定義 22** 群の作用によって与えられた点 $x \in X$ から得られるすべての点集合 $\mathcal{O}(x)$ は，$x$ の**軌道**とよばれる．すなわち

$$\mathcal{O}(x) = \{T_g(x) \,|\, g \in G\}$$

集合 $\mathcal{O}(x)$ の濃度を軌道の長さという．

先の例では，3 種類の異なる軌道があった．長さ 1 と 3 と 6 の軌道である．

明らかに，任意の点は，それ自身の軌道に属する．その軌道が 1 点で構成されているとき，その点をその作用の**不動点**という．図 5.1 において，ただ 1 つの不動点は $O$ である．

図 5.1 をみてみよう．$A = A_1$ の軌道は，$\{A_1, A_2, A_3\}$ である．$A_2$ あるいは $A_3$ を始点としてとったとしても，同じ軌道を得る．これは，次の一般的性質の現れである．

『**点 $x$ の軌道に属する任意の点の軌道は $\mathcal{O}(x)$ と一致する．**』

事実，$y \in \mathcal{O}(x)$ とすると，ある適当な元 $h \in G$ に対して $y = hx$ となる．このとき，$\mathcal{O}(y) = \{gy|g \in G\} = \{ghx|g \in G\}$ となるが，群の公理より，任意の元 $h \in G$ に対して，$G = \{gh|g \in G\} = G$ となる．

この結果は次の重要な事柄を導く．

『**任意の 2 つの軌道は等しいか，または共通元が全くないかのどちらかである．**』

事実，2 つの軌道 $\mathcal{O}(x)$ と $\mathcal{O}(y)$ に共通元 $z$ があるとすると，$\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(z) = \mathcal{O}(y)$ となる．

軌道，あるいは集合を軌道に分割するという例は，単位円 $S$ を積を演算とする複素数の群とみなしたとき，この群の平面上への作用を考えると思いつくだろう．この作用は 1 つの不動点 (数 0) をもち，平面の残りの点は，同心円を軌道として分割される．

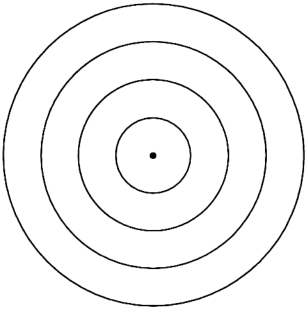


図 5.2　群 $S$ による軌道

**練習 108.**　$D_3$ を複素数平面上の正三角形の対称群とする．ただし，その正三角形は中心が原点で，対称軸の 1 つが $x$ 軸であるように置かれているものとする．このとき，有限集合 $\{0, 1, -1, 2, -2, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}, 4, -4, 2+2i\sqrt{3}, 2-2i\sqrt{3}, -2+2i\sqrt{3}, -2-2i\sqrt{3}\}$ 上の $D_3$ による作用に対する軌道をすべて求めよ．

**問題 43**　ある適当な集合上に，有理式の群 $\Phi$(練習 74) の自然な作用を定義せよ．

**解答．** 1 変数の有理式は関数と考えられる．つまり，実数から実数への写像である．不運にもこれらの関数は，実数全体の上で定義されているわけではない．なぜならば，分母が 0 になることがあるからである．この状態を改善する 2 つの方法がある．1 つは，$\mathbb{R}$ から 2 点 0, 1(分母が 0 になる可能性のある $x$ のすべての値である) を除

く方法，もう1つは，$\mathbb{R}$ 以外の点 $\infty$ を $\mathbb{R}$ に付け加え，次の規則で関数をこの1点にまで定義するものである．

| | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | $F_5$ | $F_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\infty$ | 1 | 0 | 1 | $\infty$ | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | $\infty$ | 0 | $\infty$ |
| $\infty$ | 0 | $\infty$ | $\infty$ | 0 | 1 | 1 |

この表は，集合 $\mathbb{R}\cup\infty$ 上への $\Phi$ の正真正銘の作用を定義している．とくに，3点 $0, 1, \infty$ は1つの軌道を形成し，この軌道上への $\Phi$ の作用は，3つの印の置換群 $S_3$ と $\Phi$ との同型写像を定義している．

**練習 109.**　この作用の軌道で，濃度が3の集合 (上記以外) を1つ求めよ．また，それ以外の軌道は，濃度が6の集合であることを証明せよ．

**練習 110.**　関数 $F_i \in \Phi$ を複素変数関数とみなし，群 $\Phi$ の作用を集合 $\mathbb{C}\cup\infty$ 上に延長する．このとき，$\Phi$ の作用の軌道で，濃度が2のものを求めよ．また，その濃度2の軌道と上記の2つの濃度3の軌道以外は，濃度が6の軌道であることを証明せよ．

## §5.5　軌道を数える

群の作用の別の例を考えてみよう．

**問題 44** $Q$ を空間内の立方体とし，$G$ を，$Q$ を $Q$ にうつす空間の回転全体で構成される群 (つまり $Q$ の**真の対称群**) とする．このとき，$G$ のすべての元を列挙し，$Q$ の面集合上への $G$ の作用を述べよ．

解答．$G$ は恒等変換以外で次の元を含む：

- 2つの平行な辺 (たとえば，図5.2の $AA'$) の中点を通る直線の回りの180° 回転が6つ．

- 2つの互いに反対側の面の中心をむすぶ直線(たとえば，$BB'$)の回りの180° 回転が3つ．
- 上記と同じ直線の回りの90° 回転が6つ．
- 立方体の互いに反対側にある頂点の組を含む直線(たとえば，$CC'$)の回りの120° 回転が8つ．

このように，$G$ は24個の元で構成される．

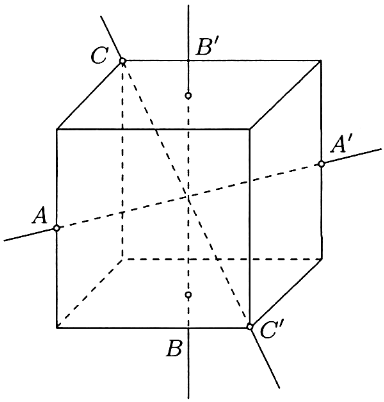


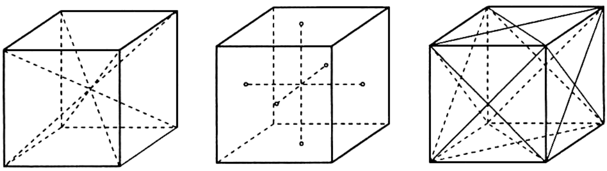

図 5.3　立方体の回転

立方体の面の集合 $F$ 上の $G$ の自然な作用は，**推移的**である．すなわち，任意の面は，任意の他の面に群のある適当な元によってうつることができる．言い換えると，集合 $F$ は，6つの点で構成されるが，その群の作用に対して1つの軌道をつくる．任意の面 $f \in F$ に対して，$f$ を動かさない回転はちょうど4つある：恒等変換と，この面の中心を通る直線の回りの3つの回転である．$6 \cdot 4$ は，$G$ の位数24であることに注意しよう．

**練習 111.**　辺の集合 $E$ と頂点の集合 $V$ 上の $G$ による作用について述べよ．

問題44と練習111で濃度が6と8と12の集合上への $G$ の推移的な作用を求めてきた．これらの濃度はすべて，24の約数(群の濃度)であることに注意しよう．24の約数は他にもある．すべての約数 $d$ に対して，立方体のある幾何学的な元からなる $d$ 個の集合を構成することができ，その集合上で，$G$ は推移的に作用する．図5.4は，自然な推移的作用をもつ4個，3個，2個の要素で構成される集合 —— 立方体内に内接された対角線の集合 $D$，中線の集合 $M$, そして，正四面体の集合 $T$ を示している．

**定義 23** 群の推移的な作用をもつ集合をこの群の等質空間という．



$a$　　$b$　　$c$

図5.4　立方体の対称群の等質空間

これらのそれぞれの場合において，群 $G$ から対応する集合の変換群への準同型写像がある．

**練習 112.** 集合 $F, E, V, D, M$ のうちのどの集合に対して，この準同型写像は
$a$) 全射か；　$b$) 同型写像か．

作用される集合として，練習112の集合のなかを材料として構成される集合も考えられる．

**問題 45** 組 $(f, e)$ の集合上の $G$ による作用に対する軌道を図形で説明せよ．ただし，$f \in F$ は立方体 $Q$ の任意の面，$e \in E$ はその任意の辺である．

**解答.** 問題の集合は，$F \times E$ (集合 $F$ と $E$ の直積) である．それは，全部で $6 \times 12 = 72$ 個の要素からなり，3 つの異なるカテゴリーに分かれる．すなわち辺 $e$ が面 $f$ に属するもの (図 5.5a)，辺 $e$ と面 $f$ とに 1 つの共通頂点があるもの (図 5.5b)，辺eが面fと共通点がないもの (図 5.5c) である．明らかに，辺と面の組はこれらの 3 つのタイプのうちの 1 つに属する．そしてそのタイプはどんな運動によっても別のタイプの組にはうつれない．同じタイプに属する任意の 2 つの組は，ある適当な運動でそれぞれうつり合うことを示そう．

最初のタイプ (辺が面に含まれるタイプ) の 2 組 $(f_1, e_1)$, $(f_2, e_2)$ が与えられたと仮定する．まず，$f_1$ を $f_2$ にうつす回転をみつけ，それから，この面を動かさない 4 つの回転を用いて $e_1$ を $e_2$ に動かす．これで証明は終わりである．あとの 2 つの場合も同様である．

このように，$G$ の作用によって，集合 $F \times E$ は，3 つの軌道に分かれる．その典型的な代表元は，図 5.5 に示される．

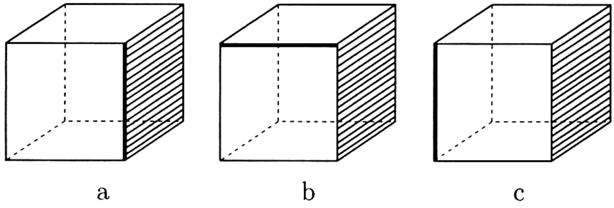


図 5.5　面–辺の異なる組

**練習 113.** 次の集合上の $G$ による作用に対する軌道の個数を求めよ．また，その軌道の代表元を示せ：
(a) $V \times F$(頂点–面)
(b) $D \times F$(対角線–面)
(c) $E \times E$(順序づけられた辺の組)

これまでの議論でわかったことを一般化しよう．それには，点の**固定部分群**という概念が必要である．

**定義 24** 集合 $X$ 上に $G$ の作用が与えられているとする．このとき，$x \in X$ の**固定部分群**とは，点 $x$ を動かさない $G$ の元のすべての集合 $\mathrm{St}(x)$ である．すなわち

$$\mathrm{St}(x) = \{g \in G \mid T_g(x) = x\}.$$

固定部分群は，$G$ の部分群である．なぜならば，任意の元 $g, h \in \mathrm{St}(x)$ に対して，次の式が成立するからである：$T_{gh}(x) = T_g(T_h(x)) = T_g(x) = x, T_{g^{-1}}(x) = T_g^{-1}(x) = x$.

不動点の固定部分群は，$G$ 全体と一致する．たとえば，図 5.1 をみよ．点 $O$ の固定部分群は，群全体である．また，点 $A$ の固定部分群は，2 つの元 (恒等変換と対称変換) からなる．一方，点 $B$ の固定部分群は，自明な部分群 (恒等変換だけからなる群) である．

ここで，読者は，問題 44 と同じ規則に気がつくだろう．すなわち，固定部分群の濃度と対応する軌道の長さとの積は，全体の群の濃度である．

$$|\mathcal{O}(x)| \cdot |\mathrm{St}(x)| = |G| \tag{5.3}$$

(5.3) 式を証明するため，$G$ の部分群 $H = \mathrm{St}(x)$ による右剰余類分解を考える：

$$G = g_1H \cup g_2H \cup \cdots \cup g_kH.$$

同じ剰余類に属するすべての元は，$x$ に同じように作用する．すなわち，同じ剰余類のすべての元は $x$ を同じ位置に動かす．なぜならば，任意の $h \in H$ に対して，$T_{gh}(x) = T_g(T_h(x)) = T_g(x)$ だからである．逆に，$g, k \in G$ が $x$ を同じ位置に動かすとき，$g$ と $k$ は $H$ による同じ剰余類に属する．実際，$k = gh$ となる $h \in G$ が存在し，そのとき

$$T_h(x) = T_{g^{-1}k}(x) = T_g^{-1}T_k(x) = x$$

が成り立つ．ゆえに，$h = g^{-1}k \in \mathrm{St}(x)$.

したがって，$x$ の軌道の点の個数は剰余類分解 $G/\mathrm{St}(x)$ における剰余類の個数に等しい．よって，(5.3) が示された．

(5.3) 式は，とくに，同じ軌道内のどのような点の固定部分群をとっても，濃度が同じになることを示している．事実，それらは $G$ の元で共役となる．よって，それらはすべて同型である．すなわち，次のことがわかる．

『$G$ を $X$ に作用する群とし，$\mathcal{O}(x)$ をその作用による $x \in X$ の軌道とする．このとき，任意の 2 点 $x, y \in \mathcal{O}(x)$ に対して，$\mathrm{St}(x)$ と $\mathrm{St}(y)$ は共役である.』

実際，仮定により，$y = T_g(x)$ となる $g \in G$ が存在する．この $g$ による共役化で $\mathrm{St}(x)$ と $\mathrm{St}(y)$ は共役になる．実際，任意の元 $h \in \mathrm{St}(x)$ に対して，次の式が成り立つ．

$$T_{ghg^{-1}}(y) = T_g(T_h(T_g^{-1}(y))) = T_g(T_h(x)) = T_g(x) = y$$

ゆえに，$g\,\mathrm{St}(x)g^{-1} \subset \mathrm{St}(y)$．$x$ と $y$ を入れかえると $\mathrm{St}(y) \subset g\,\mathrm{St}(x)g^{-1}$ であるから，$g\,\mathrm{St}(x)g^{-1} = \mathrm{St}(y)$．すなわち，$\mathrm{St}(x)$ と $\mathrm{St}(y)$ は共役である．

**問題 46** $p$ 個の等しい部分に分けられた円を $n$ 色で色づける方法は，何通りあるか．ただし，$p$ は素数とする．また，2 つの色づけ方は，その円の回転によって互いにうつり合うとき，同じぬり方であるとする．

**解答.** 円の可能な限りの色づけ方 ($n^p$ 個) への巡回群 $C_p$ の作用を扱う．求めたいのは，この作用による軌道の個数である．軌道の長さは群の濃度の約数であるから，この例ではただ 2 つの値しかとれない．すなわち，1 あるいは $p$ である．なぜならば，$p$ は素数だからである．長さ 1 の軌道は，どのような回転によっても変化しない色づけに対応する．すなわち，それは，円全体が 1 色でぬられた色づけである．そのような色づけの総数は $n$ 個である．残りの色づけの総数は $n^p - n$ 個であるが，それは濃度 $p$ の軌道に分かれる．したがって，そのような軌道は $(n^p - n)/p$ 個である．よって，軌道の総数，すなわち円の色づけ方は，全部で $(n^p - n)/p + n$ 通りある．

$p$ が素数のとき，数 $n^p - n$ は $p$ で割り切れることもついでながら証明できたことになる．これは，フェルマーの小定理 4.6 の別証でもある．

**練習 114.** 問題 46 において $p$ が素数でない場合には何通りあるか．

練習 114 を，問題 46 で用いたような直接な議論で解くのは難しい．しかしながら，任意の群の作用による軌道の個数を計算するための一般公式があ

る —— いわゆる，**バーンサイドの公式**とよばれる公式である．次にそれを述べ証明する．

$G$ が，集合 $M$ 上に作用する群であるとする．$g \in G$ に対応する変換 $T_g$ の不動点の個数，すなわち $T_g(x) = x$ となる $x \in M$ の個数を $N(x)$ とする．

**練習 115.** 数字 0, 1, 8 は，点対称 (180° 回転) によって形が変わらないが，数字 6, 9 は形が変わる．一方，残りの数字 2, 3, 4, 5, 7 は，180° 回転によって数字としては意味のない形に変わる．このとき，このような 180° 回転によって形が変わらない 5 桁の数字は何個あるか．

**定理 11 (バーンサイドの公式)** 軌道の個数 $r$ は，$G$ のすべての元に対する不動点の個数の相加平均である．すなわち，次の式が成り立つ．

$$r = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} N(g)$$

**証明** 式の証明の前にまず，簡単な問題を考えよう．「与えられた点 $x \in M$ は，総和 $\sum_{g\in G} N(g)$ のなかに何回でてくるか？」 明らかに，$g$ が $x$ を動かさないとき，$x$ はその総和に現れる．よって，答えは「$|\,\mathrm{St}(x)|$ 回」である．軌道 $\mathcal{O}(x)$ に属する他の点は，その総和に同じ回数現れる．なぜならば，すべての固定部分群の濃度は等しいからである．よって，$x$ の軌道上の点の和への総寄与は，$|\,\mathrm{St}(x)| \cdot |\mathcal{O}(x)|$ であることがわかる．すでにみたように，この個数は，$G$ の濃度 $|G|$ に等しい．どの軌道も和への寄与は同じ $G$ となるから，その総和は $|G|\cdot$ (軌道の個数) である．これで証明された．□

バーンサイドの公式を使って，再度問題 46 を解いてみよう．ここで，恒等変換は $n^p$ 個の不動点がある．一方，任意の非恒等変換は $n$ 個の不動点がある．よって，$r = (n^p + (p-1)n)/p$ である．容易に確かめられるように，この結果は以前得られたものと同じである．

**問題 47** 7 個の白いビーズと 3 個の黒いビーズでできたネックレスを考える．異なるネックレスの個数を求めよ．

**解答．** 2 つのネックレスは，どちらかのネックレスを回転，あるいは対称変換させることによってもう片方のネックレスと同じものに

なるとき，同じネックレスであるとみなす．したがって，固定された正十角形の頂点において，7 個の白いビーズと 3 個の黒いビーズの可能な限りのすべての配置の集合 $X$ と，$X$ の二面体群 $D_{10}$ による作用を考えなければならない．

バーンサイドの公式を念頭において，$D_{10}$ の任意の元に対する $X$ の不動点の個数を計算しよう．恒等変換によって，集合 $X$ のすべての $\binom{10}{3} = 120$ 個の点は動かない．

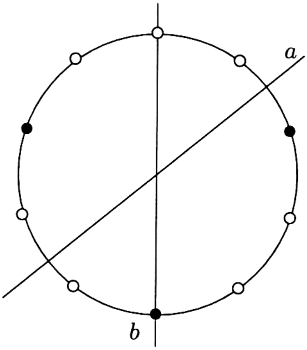



図 5.6 3-7 タイプのネックレス

ネックレスは自明でない回転によって形が変わる．同じことが軸 $(a)$ に関する対称変換 (図 5.6) についてもいえる．なぜならば，白と黒どちらの色の個数も奇数個だからである．しかし，軸 $(b)$ に関する対称変換によっては，ネックレスの形は変化しない場合がある．軸 $(b)$ に関する対称変換に対して，変わらないネックレスは $2 \cdot 4 = 8$ 個ある：まず第一に，対称軸上のビーズの 1 つは白いビーズで，もう 1 つは黒いビーズでなければならない．第二に，その軸に対称的な 4 組のビーズのうちの 1 組は黒いビーズの組でなければならない．軸 $(b)$ に関する対称変換の個数は 5 個であるので，バーンサイドの公式によって次が求まる：$r = (120 + 5 \cdot 8)/20 = 8$.

**練習 116.** 問題 47 において，白いビーズが 6 個，黒いビーズが 4 個の

場合はどうなるか．

**練習 117.** さいころとは，1 から 6 までの数字がおのおのの面に記されている立方体のことである．異なるさいころの個数を求めよ (2 つのさいころは，空間内での回転で同じになるとき同じさいころとみなす)．

**練習 118.** 2 色で (つまり与えられた 2 色だけを使って) 立方体の $(a)$ 頂点 $(b)$ 辺 をぬりわける方法は何通りあるか．ただし，練習 117 と同様に真の回転変換だけを考慮にいれる．

**練習 119.** 15 角形内に内接できる六角形は何通りあるか (ある平面運動によって等しくなるとき，2 つの図形は等しいとみなす)．

## §5.6　不変量

ネックレスの問題は，群論やバーンサイドの公式を適用しなくても解ける．一番自然な解き方は，以下のように述べられる．3 個の黒いビーズによって，その円は 3 つの部分に分かれる．それぞれの部分に $m$ 個，$n$ 個，$k$ 個の白いビーズがあるとする．ただし，$m, n, k$ は 0 から 7 までの数で，$m+n+k=7$ をみたす整数である．

このとき，$(m, n, k)$ は，$m, n, k$ の順序を変えても同じネックレスを表していることに注意しよう．回転と対称変換によって，どのような順列でも生成できるからである (4 個の黒いビーズを用いた場合は正しくない!) したがって，$m \leq n \leq k$ と仮定して一般性を失わない．よって，ネックレスの問題はその条件をみたす 3 つの整数の組の個数の計算問題となる．このような組は直接みつけられる．次は，辞書式順序で並べられたものである：$(0,0,7)$, $(0,1,6)$, $(0,2,5)$, $(0,3,4)$, $(1,1,5)$, $(1,2,4)$, $(1,3,3)$, $(2,2,3)$.

ところで，3 組 $(m, n, k)$ によって軌道をすべて列挙できるのはなぜだろうか？ なぜなら，それは次の 2 つの性質をみたすからである：

- 2 つのネックレスが等しい (同じ軌道に属する) とき，その対応する 3 組は等しい．
- 2 つのネックレスのその 3 組が等しいとき，その 2 つのネックレスは等しい．

最初の性質は次のようにも表現される．$m, n, k$ の値はその作用の軌道で一定である．

**定義 25** 群 $G$ が集合 $X$ に作用していると仮定する．このとき，$X$ から集合 $N$ への写像 $\varphi$ が，この作用の**不変量**であるとは，同じ軌道内のすべての元が，$\varphi$ によってすべて同じ値にうつるときをいう．

不変量は任意でありうる．上の例題で，$N$ は，順序づけられていない 3 つの整数で構成されていた．これらの 3 つの整数の最小数 (上で $m$ と表されている) もまた，この群の作用の不変量となる．しかし，この不変量は，2 番目の性質をもたない．たとえば，図 5.7 の 2 つのネックレスは，異なるネックレスであるが，それらの $m$ の値は同じである．このような不変量では，異なる軌道を区別することはできない．

**定義 26** 異なる軌道で不変量 $\varphi : X \to N$ の値がすべて異なるとき，その不変量を**完全不変量**という．

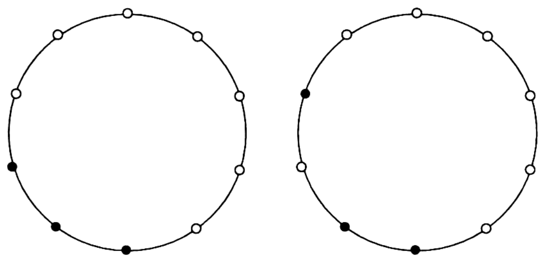


図 5.7 ネックレスの不変量

**練習 120.** 4 個の黒いビーズと 6 個の白いビーズでできたネックレスの完全不変量を構成せよ．

$\mathcal{M}$ を平面運動全体の群とする．このとき，$\mathcal{M}$ は自然な方法で平面上に作用する．この作用は推移的であり，よって平面全体は群 $\mathcal{M}$ の等質空間となる．しかし，この作用の不変量は面白くない．なぜならば，この不変量はた

だの定写像だからである.

$\mathcal{M}$ は，平面上の直線全体の集合にも作用する．この作用は自明ではない．2つの線分が同じ軌道に属するための必要十分条件は，その2線分の長さが等しいことだからである．このように，線分の長さはこの作用の完全不変量である．

**練習 121.** 次の集合上に作用する群 $\mathcal{M}$ の完全不変量をいくつか述べよ：
(a) すべての三角形　(b) すべての四角形

$H$ が $\mathcal{M}$ の部分群であるとき，$H$ もまた平面に作用する．$H$ が十分小さければ，その軌道は大きくない．したがって，その作用は自明でない不変量をもつかもしれない．たとえば，$H$ が点 $A$ の回りの回転の群であるとき，その軌道は $A$ を中心とする円周である．$A$ からの距離がこの作用の完全不変量である．$A$ を中心とする極座標系において (p.29 参照)，$A$ からの距離は極距離 $r$ である．したがって，すべての不変量は $r$ の関数 $f(r)$ となる．

さて，平面上の2面体群 $D_3$ (図 5.1 参照) による作用を考えよう．$O$ を極の中心とし，$OM$ を極軸とする．このとき，極距離 $r$ はこの作用の不変量である．しかし，完全不変量ではない．完全不変量にするためには，$r$ に加えてもう1つの関数 $\cos 3\varphi$ が必要である．ここで，関数 $\cos 3\varphi$ は $D_3$ の不変量であることに注意しよう．実際，$D_3$ は対称変換 $\varphi \mapsto -\varphi$ と回転 $\varphi \mapsto \varphi + 120^\circ$ によって生成され，$\cos 3\varphi$ はこれらの変換で変わらない．実は，組 $(r, \cos 3\varphi)$ がこの作用の完全不変量となる．なぜならば，容易に確かめられるように，同次方程式

$$\begin{cases} \cos 3\varphi = b \\ r = c \end{cases}$$

は，任意の実数 $c > 0$ と $|b| \leq 1$ に対して，1つの軌道の点に対応する3つ，あるいは6つの解をもつからである．

## §5.7　結晶群

必要なテクニックがそろったので，まえがきで述べた敷き詰め模様の分類問題について考えてみよう (p.4 参照)．敷き詰め模様の対称群 —— 2つの異なる方向に無限に繰り返された平面模様 —— は俗にいう**平面結晶群**によって

表される．このような群の例には，問題 27 のころがる正三角形の群 —— 図 3.1b の敷き詰め模様の対称群 —— がある．結晶群を**壁紙群**ともいう．

正確な定義は次の通りである．

**定義 27** 結晶群とは有界な基本領域をもつ平面運動の離散的な群である．

この定義における 2 つの言葉を説明しよう．

**定義 28** 運動の群 $G$ が**離散的**であるとは，$G$ による任意の軌道が平面上で離散的な集合であるときをいう．すなわち，平面上の任意の点 $A$ に対して，$A$ の近傍で，$A$ を含む軌道のどのような他の点も含まないものが存在するときをいう．

離散的な群の簡単な例は，1 つの移動によって生成される巡回群である．逆に，長さが通約不能 (比が有理数でない) な 2 本の平行なベクトルの移動を含む群は，離散的ではない．なぜならば，任意の点 $A$ の軌道は，$A$ を通りその移動と平行な直線の稠密な部分集合だからである．

**練習 122.** $\alpha°$ 回転によって生成される群が離散的であるための必要十分条件は，$\alpha$ が有理数であることを証明せよ．

**練習 123.** 平面運動の離散的な群の作用によって平面上の任意の点の固定部分群は有限となることを証明せよ．

説明が必要な二番目の概念は，**基本領域**である．

**定義 29** 群 $G$ の**基本領域**とは，次の 2 つの性質をみたす領域[1] $F$ である：

- 平面上の任意の点は，ある点 $x \in F$(境界点も許す) の軌道に属する．
- $F$ の異なる 2 つの内点は，同じ軌道に属さない．

この 2 つの性質は，群の変換による $F$ の像が (境界点を除いて) すべて異なり，重ならないで平面をおおいつくすことを意味する．別の言い方で，図

[1] 領域の正確な意味を述べるのは大変である．しかし，この章では「領域」を「多角形」で代用して差し支えない．

$F$ による平面の**タイル張り**という．

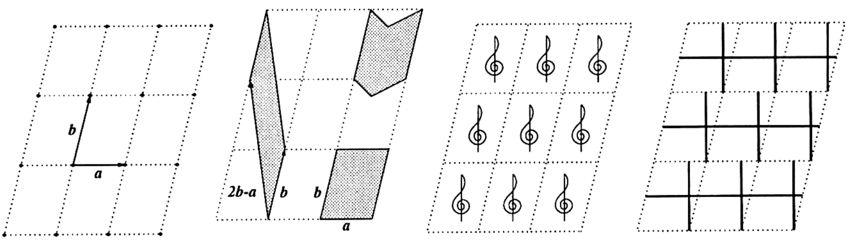
たとえば，ころがる正三角形の群 (問題 27) は結晶群である．基本領域としては，最初の位置にある正三角形をえらべる．問題 27 で注意した主張は，まさに基本領域の定義の二番目の性質である．

**練習 124.** $C_n$ と $D_n$ の基本領域を求めよ．

「結晶」という言葉を使ったのは，空間運動の離散的な群が，自然界における結晶の対称群を描くのに用いられているからだ．結晶群において，平面空間と 3 次元空間のどちらにも共通の記号体系がある．たとえば，ころがる正三角形の群は $p3m1$ と表される．

結晶群とそれに対応する敷き詰め模様の例をいくつかあげよう．

一番簡単な例は $p1$ と表され，独立な 2 つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の移動によって生成される．図 5.8a は，$p1$ の生成元と点の軌道を示している．




a　b　c　d

図 5.8　一番簡単な結晶群

基本領域として，辺 $\mathbf{a}$ と辺 $\mathbf{b}$ をもつ平行四辺形をとることができる．その基本領域のえらび方はいろいろある．図 5.8b は，$p1$ に対するいくつかの異なる基本領域を示している．これらの領域のうちの 2 つは平行四辺形で，1 つは六角形である．一方の平行四辺形 1 の独立な 2 辺は，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ である．平行四辺形 2 の独立な 2 辺は，$2\mathbf{b}-\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ である．

**練習 125.** $k\mathbf{a}+l\mathbf{b}, m\mathbf{a}+n\mathbf{b}$ を独立な 2 辺とする平行四辺形が，基本領域であるための必要十分条件は，$|kn-lm|=1$ であることを証

明せよ．ただし，$k, l, m, n$ は整数とする．

敷き詰め模様の群のなかで一番簡単な群 $p1$ は，敷き詰め模様の純粋な平行移動からなる対称群となる．平行移動以外に対称変換をもたなければ，敷き詰め模様の対称群は $p1$ である．対称群が $p1$ 型の敷き詰め模様をみつけることは簡単である．そのためには，基本領域である平行四辺形内にその対称群が自明であるような図形を描き，与えられた群の平行移動で得られるこの図に合同な図すべての和を考えるだけでよい (図 5.8c).

そのえらばれた図形が厳密にその平行四辺形内部にあれば，得られる敷き詰め模様の対称群はまさに $p1$ と等しい．しかし，もしその図形が平行四辺形の境界に触れてもよいなら，得られる図形の対称群は，集合としてもっと大きくなるかもしれない．この例は，図 5.8d にある．

$p1$ は，平面の結晶群のなかで一番簡単なものであるばかりでなく，次のような理由で大変重要である．

**補助定理 1.** すべての平面の結晶群は，$p1$ 型の群 (つまり 2 つの独立な移動によって生成される群) を含む．

**証明** 結晶群は少なくとも 1 つの移動を含まなければならない．そうでなければ，有限群になるからである．

$G$ を離散的な平面運動の群で，条件『$G$ に属するすべての (平行移動) に対して共通の平行な直線 $\ell$ が存在する』をみたすものとする．このとき，$G$ の基本領域は，有界ではないことを示す．

回転以外のどのような運動が $G$ に属するのか，少し考えてみよう．まず，次のことに注意していただきたい．$G$ に属する任意の映進の対称軸は $l$ に平行でなければならない —— 映進の 2 乗は移動だからである．また，その群に属する回転は，180° 回転しかない．なぜならば，$R^{\varphi} \in G, \varphi \neq 180°$ であるとき，その群は，移動 $T_{\mathbf{a}} \in G$ 全体とともに，$T_{\mathbf{a}}$ に独立な移動 $R^{\varphi} \circ T_{\mathbf{a}} \circ R^{-\varphi}$ を含むからである (練習 58 の答えをみよ)．2 つの 180° 回転の合成は，それらの中心をむすぶ直線に沿った移動である．したがって，$G$ に属するすべての回転の中心は，$l$ に平行な一直線上になければならない．$l$ は，すべての回転の中心を通る直線であると仮定して一般性を失わない．次の練習問題で，$G$ がどのような対称変換を含むのかを考えてみよう．

**練習 126.** $G$ に含まれる線対称変換は，その対称軸が $l$ に垂直か，あるいは $l$ に一致するようなもののみを含むことを証明せよ．

以上のことから，2点は直線 $l$ からの距離が等しいときのみ，1つの軌道に属することがわかる．基本領域は，おのおのの軌道の1点を含まなければならない．よって，$G$ の基本領域は有界ではなく，$G$ は結晶群ではない．

これで，任意の敷き詰め模様の群 $G$ は，2つの独立な移動とそれらが生成する $p1$ 型の部分群を含むことが示せた．実際にはもっと強い主張が成り立つ．

**補助定理 2.** $G$ に属する移動全体の群は $p1$ 型の群である．

この補助定理を示すためには，次の問題を解かなければならない．

**練習 127.** 移動だけで構成される任意の敷き詰め模様の群は，2つの独立な移動によって生成されることを証明せよ．

ある意味で任意の敷き詰め模様の群は，$p1$ や平面運動の有限群に帰着される．$G$ を任意の敷き詰め模様の群，$H$ を $G$ の移動からなる部分群とする ($H$ は $p1$ 型であることはすでに知っている)．このとき，部分群 $H$ は $G$ において正規である．なぜならば，任意の運動による移動の共役化は移動だからである (p.216 の表参照)．

**補助定理 3.** 任意の結晶群 $G$ に対して，商群 $G/H$ は有限群で，10個タイプ $C_n$, $D_n$ $(n = 1, 2, 3, 4, 6)$ のうちのどれか1つのタイプに等しい．

ここではこのことを証明しないが，読者には平面結晶群の表を用いてこのことを確かめてもらいたい (練習 130)．$G/H$ のタイプを $G$ の**敷き詰め模様のクラス**という．

それではいくつかの具体例で平面の結晶群の表をつくってみよう．その前にまず群 $G$ とその部分群 $H$ そしてそれらの基本領域の間の関係について議論する．

$\Phi$ が $G$ の基本領域，$g_1, \ldots, g_k$ が剰余類分解 $G/H$ の完全な代表元の集合であるならば，そのとき，和集合

$$\Pi = \bigcup_{i=1}^{k} g_i \Phi$$

は $H$ に対する基本領域をなす．領域 $\Phi$ をその敷き詰め模様の**モチーフ**といい，領域 $\Pi$ をその**基本組織**という．原則として，基本組織 $\Phi$ と $g_i$ は $\Pi$ が平行四辺形になるようにいつもとれるが，別の形の多角形，とりわけ正六角形を用いるほうが便利なこともある．

($\Pi$ の面積)：($\Phi$ の面積) は $G$ における $H$ の**指数** (つまり $G/H$ の濃度) に等しい．$G/H$ が大きければ大きい程，$\Pi$ の基本領域 $\Phi$ は小さくなる．

**問題 48** その対称群が $p3m1$ 型であるような敷き詰め模様のモチーフと基本組織をみつけよ．また，その移動全体からなる部分群 $H$ に関する $G$ の剰余類の集合を図形で説明せよ．

**解答.** 図 5.9a をみてみよう．それは，対称群 $p3m1$，すなわち，正三角形の 3 辺に関する 3 つの対称変換によって生成される群を示している (図 5.9a の代わりに，図 3.1b も同様に使うことができた)．その敷き詰め模様は，平面上で正三角形 $MNB$ (モチーフ) をころがすことによって得られる．また，それは点 $A$ と点 $B$ と点 $D$ をむすぶベクトルによって移動を与える．

基本組織として，たとえば平行四辺形 $ABCD$ をえらぶことができる．その 2 辺 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ は移動からなる $G$ の部分群 $H$ を生成する．容易にわかるように，$S_{ABCD} : S_{MNB} = 6 : 1$ である．平行四辺形 $ABCD$ を，その敷き詰め模様の基本領域である 6 つの正三角形に分けることは不可能である (しかし，それを別の型の 6 基本領域に分けることは可能である —— やってみよう)．この場合，$H$ の先に選ばれた基本領域として六角形，たとえば $BQCLDM$ をえらぶのがもっと便利である．この基本領域は，6 つの基本的三角形に自然に分けられる．

$G/H$ の剰余類の個数を求めるとき，$H$ の元は平面上のモチーフの相対的な位置 (‘足’ の方向や向き) を変えないことに注意しよう．同じ剰余類に属する異なる運動，たとえば $g \circ h_1$ や $g \circ h_2$ $(h_1, h_2 \in H)$ は同じようにそのモチーフの相対的な位置を変える．なぜならば，$h_1$ と $h_2$ によっては，モチーフの位置は変わらないからである．図

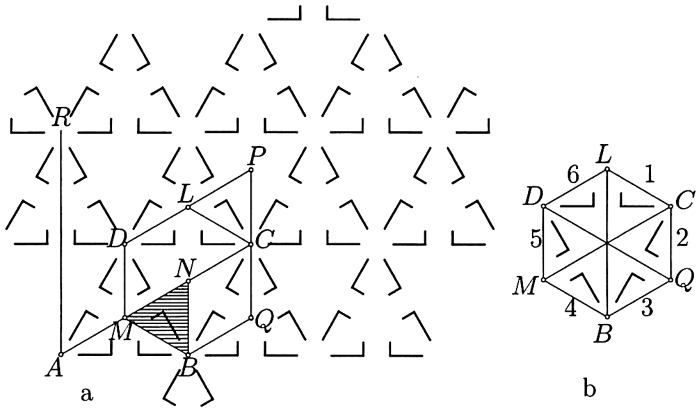



図 5.9　$p3m1$ 型の敷き詰め模様

から，モチーフには異なる 6 つの位置があることがわかる．よって，$G/H$ の元の個数は 6 である．図 5.9b にあるように，それらに 1 から 6 までの番号をつけよう．このとき，たとえば，剰余類 $gH$ に属する運動のすべては，置換 $1 \leftrightarrow 6, 2 \leftrightarrow 5, 3 \leftrightarrow 4$ を誘導する．ただし，$g \in G$ はある垂直な直線を軸とする対称移動である．

このようにして次の結果に到達する．$G/H$ は $D_3$ が正三角形の頂点の集合に作用するのと同様に，その基本組織に含まれるモチーフの集合に作用する．つまり，恒等写像と 3 つの対称移動を含む 3 つの回転変換が存在する．その結果は，次のように書かれる．$G/H \cong D_3$．この事実は，次のようにも述べられる．$G$ の敷き詰め模様のクラスは $D_3$ である．

$p3m1/p1$ と書くのは誤りである．$p3m1$ 型の群に含まれる $p1$ 型の部分群はたくさんあるからである．

**練習 128.**　$G/K$ の濃度を求めよ．ただし，$G$ は先に議論した群，$K \subset H$ は $\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{AR}$ によって生成される移動の部分群とする (図 5.9a 参照)．このとき，この群の構造を図で説明せよ．とくに，それは $C_n$, $D_n$ のうちの 1 つに同型か．

平面運動の群 $\mathcal{M}$ における $p1$ 型の部分群にはどのくらい異なるものがあるのだろうか? もちろん, 無限個あるだろう. ある部分群は 2 つの基本ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ によって生成される. しかし, このような群どうしはどれも同型である. 実際にはもっと強い主張が成り立つ. すなわち, 任意の 2 つの $p1$ 型部分群は平面の適当な線形変換によって互いに共役である (p.155 参照): $H$ が移動 $T_{\mathbf{a}}, T_{\mathbf{b}}$ によって生成され, $K$ が $T_{\mathbf{c}}, T_{\mathbf{d}}$ によって生成されるとき, $LHL^{-1} = K$ となる. ただし, $L$ は $L(\mathbf{a}) = \mathbf{c}$, $L(\mathbf{b}) = \mathbf{d}$ となる線形変換である.

**定義 30** 平面運動の 2 つの群が同値であるとは, 適当な線形変換によって互いに共役になるときをいう.

さてこれから, まえがきでも述べた主張「壁模様には 17 種類の対称群が存在する」の正確な定理を述べよう.

**定理 12 (フェドロフ–シェーンフリース)** 定義で述べられた同値性を同じものとみなして, 任意の結晶群は, 下記の表にある 17 種類の群のうちの 1 つの群に同値である. これらの 17 種類の群は, 互いに同型ではない.

**証明の概略** 証明はあまり難しくないが, かなり長い. したがって, ここでは概略のみ紹介する. 詳細は, 読者にまかせよう.

1. 結晶群の回転は, 濃度が 2, 3, 4, 6 だけであることを示す.

2. $G^+ \subset G$ を $G$ における真の (方向保存の) 運動全体からなる部分群とする. このとき, $G^+$ は, 指数 (つまり, $G/G^+$ の濃度) が 1 あるいは 2 の正規部分群である.

3. $G^+ = G$(つまり $G$ は移動と回転だけで構成される群) であるなら, $G$ は, $p1, p2, p3, p4, p6$ のうちのどれかに同値である. どれになるかは, $G$ の回転の最大濃度に依る.

4. $G^+ \neq G$ であるなら, $G$ は $G^+$ と $G - G^+$ のある運動 $f$ によって生成される. ちなみに, $G^+$ だけによって生成される群は, 上記の 5 つのタイプのどれかになる. おこりうるあらゆる可能性を考えて ($f$ は対称変換あるいは映進のどちらかであり, その軸は, 回転などの中心を通るかあるいは通らないかなど), 次のことを立証する:

   (a) $G^+ = p1$ なら, $G = pm$, $pg$ または $cm$.

(b) $G^+ = p2$ なら，$G = pmm, pmg, pgg$ または $cmm$.

(c) $G^+ = p3$ なら，$G = p31m$ または $p3m1$.

(d) $G^+ = p4$ なら，$G = p4m$ または $p4g$.

(e) $G^+ = p6$ なら，$G = p6m$.

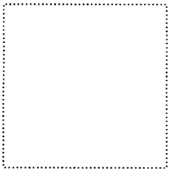
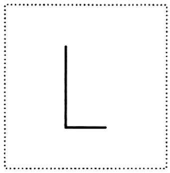
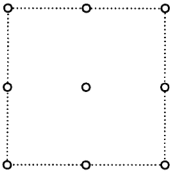
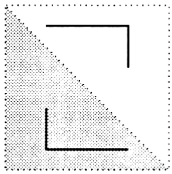
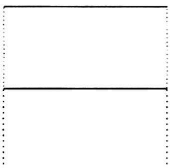
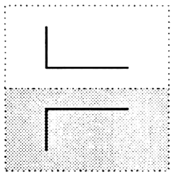
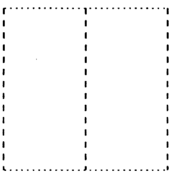
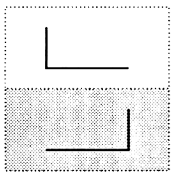
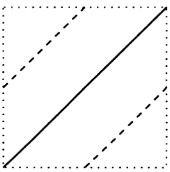
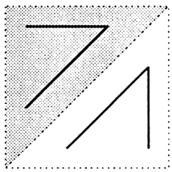
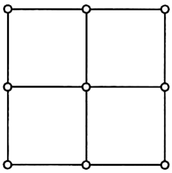
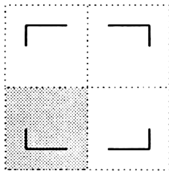
表は (左から右へ) 次の項目をもつ：

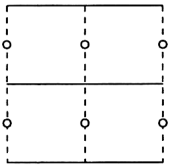
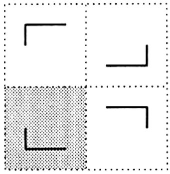
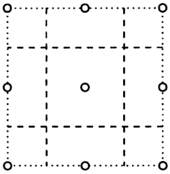
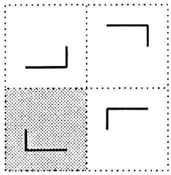
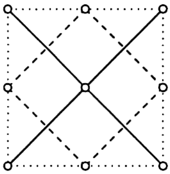
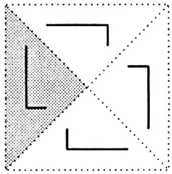
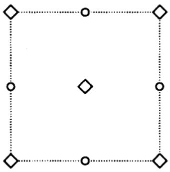
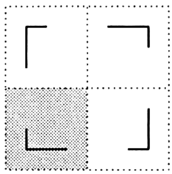
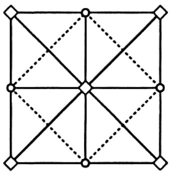
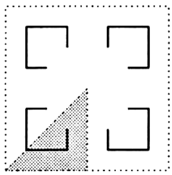
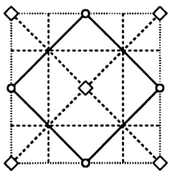
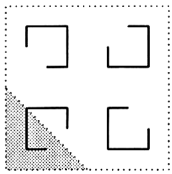
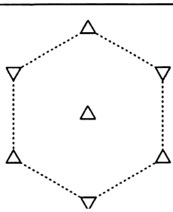
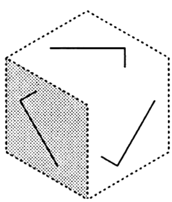
- 記号：その群の標準的な結晶学的記号.
- 対称群：平行線で囲まれた基本領域をもつ基礎組織とその群に含まれる運動に対する印 (直線は対称変換の軸，破線は映進の軸である．記号 ? はそれぞれ，濃度 2, 3, 4, 6 の回転の中心を示している).
- 例: この対称群をもつ簡単な敷き詰め模様の例.
- 生成元と関係式: その群の生成元と定義関係式の集合.

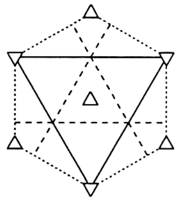
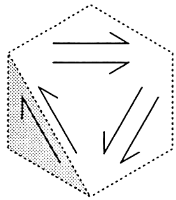
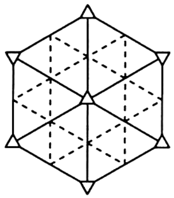
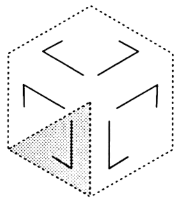
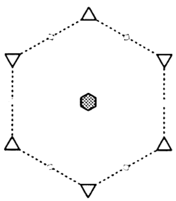
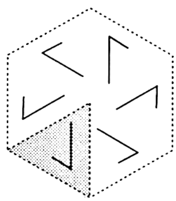
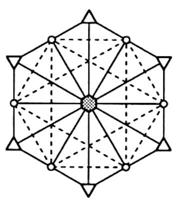
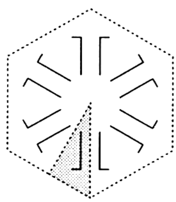
表の 1 番目〜12 番目の群に対しては正方形の形，13 番目〜17 番目の群に対しては正六角形の形の基本組織を代表とする．しかし，それ以外にも，$p1$, $p2$ 型の群に対しては平行四辺形，$pm, pg, pmm, pmg, pgg$ 型の群に対しては長方形，$cm, cmm$ 型の群に対してはひし形をとれることに注意しよう.

この表を用いると，部屋の壁紙模様など，どのような敷き詰め模様の対称群でも決定することができるだろう.

平面結晶群の表

| 号 | 対称群 | 例 | 生成元と関係式 |
|---|---|---|---|
| 1 |  |  | 独立な移動 $T_1, T_2$<br>$T_1T_2 = T_2T_1$ |
| 2 |  |  | 裏返し $R_1,\ R_2,\ R_3$<br>$R_1^2 = R_2^2 = R_3^3 = \mathrm{id},$<br>$(R_1R_2R_3)^2 = \mathrm{id}$ |
| n |  |  | 対称変換 $S_1,\ S_2$ と移動 $T$<br>$S_1T = TS_1, S_2T = TS_2, S_1^2 = S_2^2 = \mathrm{id}$ |
| g |  |  | 平行な映進 $U_1,\ U_2$<br>$U_1^2 = U_2^2$ |
| n |  |  | 対称変換 $S$ と映進 $U$<br>$S^2 = \mathrm{id},\ SU^2 = U^2S$ |
| nm |  |  | 長方形の辺に関する対称変換<br>$S_1, S_2, S_3, S_4$<br>$S_1^2 = S_2^2 = S_3^2 = S_4^2 = \mathrm{id},$<br>$(S_1S_2)^2 = (S_2S_3)^2 = (S_3S_4)^2$<br>$= (S_4S_1)^2 = \mathrm{id}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| pmg |  |  | 対称変換 $S$ と中央対称 $R_1$, $R_2$<br>$S^2 = R_1^2 = R_2^2 = \mathrm{id}$,<br>$R_1SR_1 = R_2SR_2$ |
| pgg |  |  | 垂直な映進 $U_1$, $U_2$<br>$(U_1U_2)^2 = (U_1^{-1}U_2)^2 = \mathrm{id}$ |
| cmm |  |  | 対称変換 $S_1$, $S_2$ と中央対称 $R$<br>$S_1^2 = S_2^2 = R^2 = \mathrm{id}$,<br>$(S_1S_2)^2 = (S_1RS_2R)^2 = \mathrm{id}$ |
| p4 |  |  | 中央対称 $R$ と $90°$ 回転 $R_1$<br>$R^2 = R_1^4 = (R_1R)^4 = \mathrm{id}$ |
| p4m |  |  | 二等辺直角三角形の辺に関する対<br>換 $S_1, S_2, S_3$<br>$S_1^2 = S_2^2 = S_3^2 = \mathrm{id}$,<br>$(S_1S_2)^2 = (S_2S_3)^4 = (S_3S_1)^4 =$ |
| p4g |  |  | 対称変換 $S$ と $90°$ 回転 $R$<br>$S^2 = R^4 = (R^{-1}SRS)^2 = \mathrm{id}$ |
| p3 |  |  | 3つの $120°$ 回転 $R_1, R_2, R_3$<br>$R_1^3 = R_2^3 = R_3^3 = R_1R_2R_3 = \mathrm{id}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 31m |  |  | 対称変換 $R$ と 120° 回転 $R$<br>$R^3 = S^2 = (R^{-1}SRS)^3 = \mathrm{id}$ |
| 3m1 |  |  | 正三角形の辺に関する対称変換 $S_1$, $S_2$, $S_3$<br>$S_1^2 = S_2^2 = S_3^2 = \mathrm{id}$,<br>$(S_1S_2)^3 = (S_2S_3)^3 = (S_3S_1)^3 = \mathrm{id}$ |
| 6 |  |  | 裏返し $R$ と 120° 回転 $R_1$<br>$R^2 = R_1^3 = (R_1R)^6 = \mathrm{id}$ |
| 6m |  |  | $(30°, 60°, 90°)$ 三角形の辺に関する対称変換 $S_1$, $S_2$, $S_3$<br>$S_1^2 = S_2^2 = S_3^2 = \mathrm{id}$,<br>$(S_1S_2)^2 = (S_2S_3)^3 = (S_3S_1)^6 = \mathrm{id}$ |

**練習 129.** 図 4 と図 5.8d の敷き詰め模様の対称群を求めよ.

**練習 130.** 結晶群の表における敷詰め模様のクラスを決定せよ. また, 補助定理 3 (p. 144) を証明せよ.

**練習 131.** 結晶群の記号で使われる文字と数の意味を推測してみよう.

# 第6章

# いろいろな変換

この本の主人公 —— 変換群 —— はこれまで，平面運動で構成される群という特別な例として登場してきた．この章では，別のタイプの平面変換，すなわち，アフィン変換，射影変換，相似変換，反転変換について議論する．これらの変換はいずれも実 2 変数の関数として表される．とくに複素 1 変数の一次分数関数によって表されるものもある．

## §6.1　アフィン変換

アフィン変換は，平面変換のなかでも重要なものである．それは運動の自然な一般化である．事実，平面運動全体の群 $\mathcal{M}$ は，アフィン群 $\mathrm{Aff}(2,\mathbb{R})$ の部分群である．運動からアフィン変換への変換関数は，座標を用いることで簡単に得られる．

**問題 49**　平面運動をデカルト座標を用いて表わせ．

**解答．** $Oxy$ を平面のデカルト座標系 (以下 ‘古い’ という)，運動 $f$ による $Oxy$ の像を，別のデカルト座標系 $O_1x_1y_1$(以下 ‘新しい’ という) とする．

点 $A$ が古い座標系で座標 $(p,q)$ であるとき，その像 $A'$ は新しい座標系で同じ座標 $(p,q)$ となる．

方向を変えない運動 (移動あるいは回転) に対しては，図 6.1 から容易に，古い座標系を用いて $A'$ の座標 $(p',q')$ を表すことができる．

$$\begin{cases} p' = p\cos\alpha - q\sin\alpha + p_0 \\ q' = p\sin\alpha + q\cos\alpha + q_0 \end{cases} \tag{6.1}$$

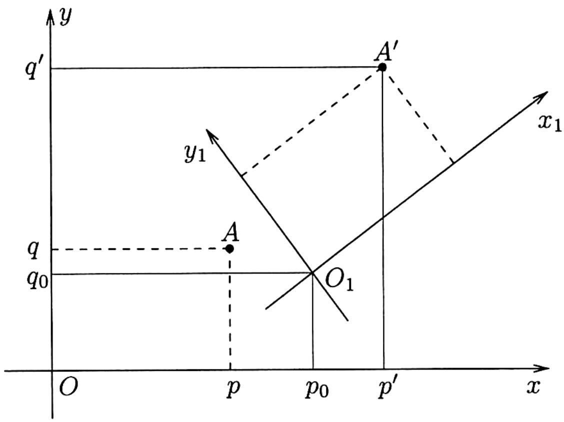



図 6.1　座標における運動

ただし，$\alpha$ は，2 つの軸 $Ox$, $O_1x_1$ のなす角である．

方向を変える変換に対しても，$q$ が $-q$ に変わるだけで同じような式を得る．

$$\begin{cases} p' = p\cos\alpha + q\sin\alpha + p_0 \\ q' = p\sin\alpha - q\cos\alpha + q_0 \end{cases} \tag{6.2}$$

アフィン変換は (6.1) や (6.2) と類似した式によって与えられる．ただし，係数は，任意の数であり，サインやコサインである必要はない．

**定義 31** 平面のアフィン変換とは，方程式

$$\begin{cases} x' = ax + by + x_0 \\ y' = cx + dy + y_0 \end{cases} \tag{6.3}$$

にしたがって，点 $(x, y)$ を点 $(x', y')$ にうつす変換である．

式 (6.3) の係数 $a$, $b$, $c$, $d$ は任意の値である．しかし平面の本当の (1 対 1) 変換を得たいなら，$ab - bc \neq 0$ と仮定しなければならない ($ad - bc$ は行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の行列式)．事実，基底ベクトル $(1, 0)$ と $(0, 1)$ は，変換 (6.3) によって，それぞれベクトル $(a, c)$ と $(b, d)$ にうつり，これら 2 つのベクトル

で構成される平行四辺形の面積は $ad-bc$ となる．

アフィン変換によって，平行な直線は平行な直線にうつるが，角の大きさは必ずしも保存されない．すなわち，アフィン変換によって正方形は平行四辺形になることもある．たとえば，図 6.2 は行列が $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のアフィン変換を示している．

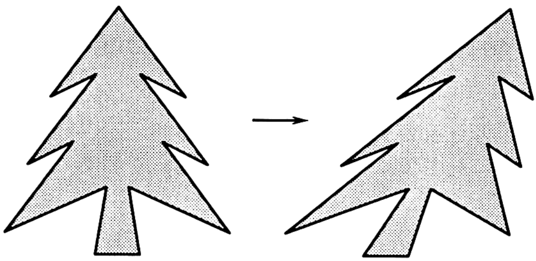


図 6.2　アフィン変換

**定義 32** 平面のアフィン変換群とは，$ad-bc \neq 0$ となるアフィン変換全体の群である．これを $\mathrm{Aff}(2,\mathbb{R})$ と表す．

アフィン変換群は平面上に推移的に作用する．原点 $O$ の固定部分群は，**線形変換群** $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ である．

**定義 33** 平面の線形変換は

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \tag{6.4}$$

をみたす変換である．群 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ は $ad-bc \neq 0$ となる変換全体の群である．

**練習 132.** $\mathbb{R}^2$ を平面の平行移動全体の群とする．このとき，$\mathrm{Aff}(2,\mathbb{R})/\mathbb{R}^2 \cong \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ であることを証明せよ．

アフィン変換の基本的性質は，直線上の点の比を保存することである (p.13 参照)．すなわち点 $C$ が線分 $AB$ を比 $k:l$ で分けるとき，$C$ の像 $C'$ もま

た同じ比 $k:l$ で対応する線分 $A'B'$ を分ける．事実 Aff$(2,\mathbb{R})$ は，直線を直線にうつし，かつ任意の直線上の点の比を保存する平面変換全体の集合と一致することが証明される．

アフィン変換は，幾何学的な問題を解くのに役立つ．ただし，その問題の主張はアフィン変換によって変わらないものでなければならないが，解答は，具体的な場合を考えると簡単になる．

簡単な例をみるため，第1章で話題にした中線の性質を考えよう．**任意の三角形の 3 つの中線は 1 点で交わり，この点はおのおのの中線を** $2:1$ **の比で分ける** (練習 10 参照).

与えられた三角形は，あるアフィン変換によって正三角形に変えることができる．正三角形に対してこの中線の性質は明らかである．

**練習 133.** アフィン変換を用いて，問題 4 (p.16) を解け．

線形変換，アフィン変換は，1次元の場合でも意味をなす．直線の線形変換は式 $x \mapsto ax$ で表され，直線のアフィン変換は，式 $x \mapsto ax+b$ で表される．その対応する群は条件 $a \neq 0$ によって特徴づけられ，それぞれ GL$(1,\mathbb{R})$, Aff$(1,\mathbb{R})$ と表す．実数 $\mathbb{R}$ の代わりに，素数による剰余を考えることもできる．そうすればそれらは有限群になる．また実数の代わりに複素数を用いることもできる．この群 GL$(1,\mathbb{C})$, Aff$(1,\mathbb{C})$ についてはのちに言及される (§6.3 参照).

**練習 134.** (a) 群 $G = \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}_2)$ の位数を求めよ．いままでででてきた群で，$G$ と同型な群を求めよ．(b) 群 Aff$(1,\mathbb{Z}_3)$ に対してはどうか．

## §6.2　写真撮影

射影変換の概念は応用の場面でもしばしば登場する．

数学的な視点からみると，写真撮影は絵を描くことと同様に，**透視変換**あるいは**中心射影**である．写真撮影は，与えられた物体の任意の点 $A$ を直線 $AO$ ($O$ は，カメラの光学上の中心点) が，フイルム平面と交わる点 $A'$ にうつす変換である (図 6.3)．自然を描く時，芸術家は写真撮影と同じようなこ

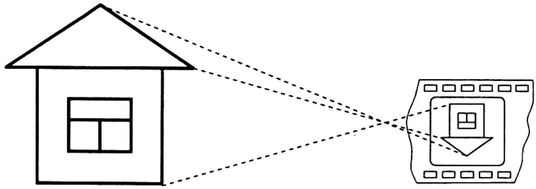


図 6.3 射影としての写真撮影

とをする．ただ違うのは，その物体と目の‘間’にキャンバスが置かれていることである．

このような変換によって，明らかに直線は直線にうつる．したがって射影変換の前にまず，直線の透視変換について述べることにする．

**定義 34** $l$, $l'$ を平面上の 2 直線，$S$ を同じ平面上の固定点とする (図 6.4a)．透視変換とは，任意の点 $A \in l$ を 2 直線 $SA$, $l'$ の交点 $A'$ にうつす写像 $p : l \to l'$ である．同様に空間内の 2 平面 $\Pi_1$, $\Pi_2$ と点 $S$ に対しても，透視変換 $p : \Pi_1 \to \Pi_2$ を定義できる (図 6.4b 参照)．

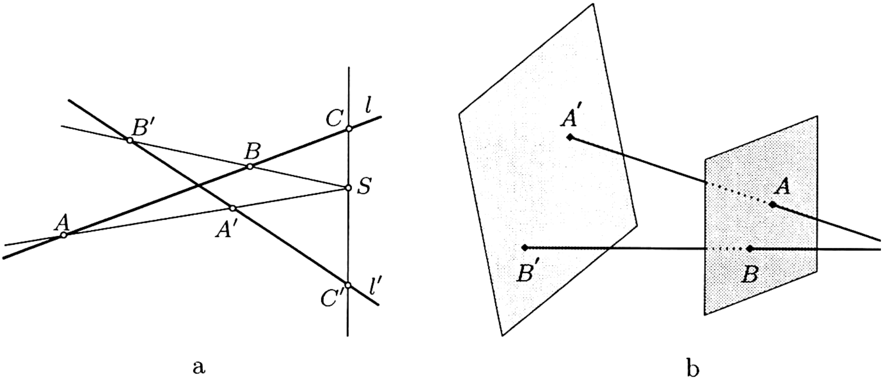



図 6.4 直線の透視変換 (a) と平面の透視変換 (b)

**定義 35** 直線をその直線，あるいは平面をその平面にうつす射影変換は透視変換のいくつかの合成である．そこで補助線または補助平面が用いられる．

射影変換の性質を表す次のような問題から議論しよう．ある直線に沿って並んだ等間隔の物体の列 (たとえば，道の木々) の写真を撮るとする．これらの点の写真への像は等間隔になるとは限らない．しかし，それらが全く任意であるはずはないので，その射影変換によって変わらないなにかある不変量があるにちがいない．このような不変量は，4 点以上の点に依存しなければならない．なぜならば，2 点間の距離は変化することができ，3 点間の相互関係もまた任意に変化できるからである．たとえば，図 6.4 において，$B$ は $A$ と $C$ の間にあるが，その像 $B'$ は $A$ の像 $A'$ と $C$ の像 $C'$ の間にはない．

注目すべき事実として，4 点の**複比**あるいは**非調和比**とよばれるその 4 点変数の関数は直線の射影変換 $p$ によって値が変わらない．

**定義 36**　4 点 $A, B, C, D$ の複比は，次のように定義される．

$$(A, B; C, D) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

ただし，4 直線 $AC, BC, AD, BD$ は符合付きの数で，正であるか負であるかは，与えられた点の組の方向に依る．

**定理 13**　複比は射影変換によって変わらない．すなわち，$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$ をみたす．

**証明**　異なる 2 つの公式によって，図 6.5 の三角形の面積を表すと，次のようになる：

$$S_{\triangle SAC} = \frac{1}{2}h \cdot AC = \frac{1}{2}SA \cdot SC \sin \angle ASC$$
$$S_{\triangle SBC} = \frac{1}{2}h \cdot BC = \frac{1}{2}SB \cdot SC \sin \angle BSC$$
$$S_{\triangle SAD} = \frac{1}{2}h \cdot AD = \frac{1}{2}SA \cdot SD \sin \angle ASD$$
$$S_{\triangle SBD} = \frac{1}{2}h \cdot BD = \frac{1}{2}SB \cdot SD \sin \angle BSD$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}(A, B; C, D) &= \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{S_{\triangle SAC}}{S_{\triangle SBC}} : \frac{S_{\triangle SAD}}{S_{\triangle SBD}} \\ &= \frac{SA \cdot SC \sin \angle ASC \cdot SB \cdot SD \sin \angle BSD}{SB \cdot SC \sin \angle BSC \cdot SA \cdot SD \sin \angle ASD} \\ &= \frac{\sin \angle ASC}{\sin \angle BSC} : \frac{\sin \angle ASD}{\sin \angle BSD}.\end{aligned}$$

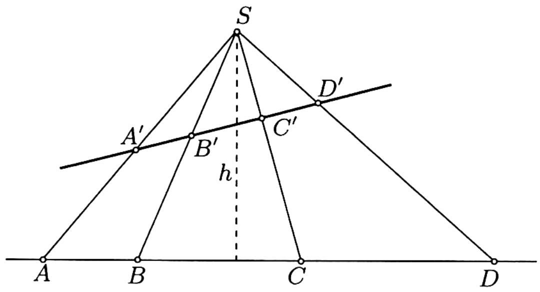



図 6.5 複比を導く

同様に，

$$(A', B'; C', D') = \frac{\sin \angle A'SC'}{\sin \angle B'SC'} : \frac{\sin \angle A'SD'}{\sin \angle B'SD'}$$

となる．ゆえに，$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$. □

**問題 50** $A$, $B$, $C$, $D$ を，一直線上に (この順序で) 等間隔で並んだ 4 本の木とし，$A'$, $B'$, $C'$, $D'$ をそれぞれ $A$, $B$, $C$, $D$ の写真への像とする．ただし，$A'B'$ =6cm, $B'C'$=2cm．このとき，$C'D'$ の長さを求めよ．

**解答.** 次を得る：

$$(A, B; C, D) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{2}{1} : \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$$

$C'D' = x$ とすると

$$(A', B'; C', D') = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{8}{2} : \frac{x+8}{x+2}$$

$(A, B; C, D) = (A, B'; C', D')$ より，

$$\frac{8(x+2)}{2(x+8)} = \frac{4}{3}$$

ゆえに，$x = 1$.

射影変換の座標における一般式を導くのに，同様の議論が用いられる．$p: l \to l'$ を直線 $l$ から直線 $l'$ への射影変換とし，$x$ を $l$ 上の変点 $M$ の座

標，$p$ による $M$ の像 $M' \in l'$ の座標を $x'$ とする．また，$l$ 上の異なる3点 $A, B, C$ を固定し，それぞれの座標を $a$, $b$, $c$ とする．このとき，関係式

$$(A, B; C, M) = (A', B'; C', M')$$

は，次のように書き直される．

$$\frac{c-a}{c-b} : \frac{x-a}{x-b} = \frac{c'-a'}{c'-b'} : \frac{x'-a'}{x'-b'}$$

ただし，$p(a) = a'$, $p(b) = b'$, $p(c) = c'$, $p(d) = d'$ である．

したがって，この式から $x$ を用いて $x'$ を表すことができる．射影変換 $p$ は次のように表される．

$$x' = \frac{mx+n}{px+q} \tag{6.5}$$

ただし，$m$, $n$, $p$, $q$ は $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$ に依存する定数である．このような関数を**一次分数変換**という．

(6.5) において，$mq - np \neq 0$ でなければならない ($mq - np$ は，行列 $\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$ の行列式)．なぜなら次のような問題を考えてみるとよい．

$$f : x \mapsto \frac{mx+n}{px+q}$$

は，実数から実数への上への1対1写像であるか？

答えは「1対1写像ではない」である．事実，$p \neq 0$ のとき，点 $x = -q/p$ には $f$ による逆像が存在しない．

**練習 135.**　この写像 $f$ において逆像が存在しない実数を示せ．

1点 $\infty$ (無限大) を導入して，その射影変換の作用を次の規則で，集合 $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \infty$ 上に拡張する (p.130 参照)：

- 任意の $a \neq 0$ に対し $\dfrac{a}{0} = \infty$
- $\dfrac{m \cdot \infty + n}{p \cdot \infty + q} = \begin{cases} \frac{m}{p} & (p \neq 0 \text{ のとき}) \\ \infty & (p = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ ．

このように，$mq - np \neq 0$ となる一次分数変換 $f(x) = \frac{mx+n}{px+q}$ は，拡張さ

れた直線 $\overline{\mathbb{R}}$ から $\overline{\mathbb{R}}$ への 1 対 1 変換を正しく定義している．

**練習 136.** 集合 $\{f : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}} | f(x) = \frac{mx+n}{px+q}, mq - np \neq 0, m, n, p, q \in \mathbb{R}\}$ は，群をなすことを確かめよ．

この群を (拡張された) 実数直線の射影変換群といい，$\mathrm{PGL}(1, \mathbb{R})$ と表す．

**練習 137.** (6.5) 式を用いて，複比が $\overline{\mathbb{R}}$ の 4 点集合に作用する射影変換群の不変量であることを確かめよ．

(6.5) 式を導く議論によって，任意の異なる 3 点は，ある適当な射影変換によって任意の異なる 3 点にうつることがわかる．このことは，3 点集合上への射影変換の作用が，自明でない不変量をもたないことを意味する．

いままでに，何回か 2 つの射影変換 $x \mapsto 1/x$, $x \mapsto 1 - x$ によって生成される群を考えた (練習 74，問題 43 など参照) が，これは射影変換群における唯一の有限群ではない．

**練習 138.** 2 つの変換 $x \mapsto 1/x$, $x \mapsto (x-1)/(x+1)$ は，$D_4$ に同型な 8 個の元からなる群を生成することを証明せよ．

**練習 139.** 直線の射影変換で有限位数のものをすべて求めよ．

直線の射影変換については，これで終わりである．次に，平面の射影変換について説明をしよう．

平面の射影変換全体の集合は群をなし，この群を $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$ と表す．この部分群として，たとえばアフィン変換全体の集合 $\mathrm{Aff}(2, \mathbb{R})$ がある．

**練習 140.** $\mathrm{Aff}(2, \mathbb{R})$ は，$\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$ の正規部分群であるか．

直線の射影変換に用いた議論と類似した議論によって，次の定理が導かれる．

**定理 14** 平面の射影変換は，デカルト (あるいはアフィン) 座標系で

$$\begin{cases} x' = \dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_0x + b_0y + c_0} \\ y' = \dfrac{a_2x + b_2y + c_2}{a_0x + b_0y + c_0} \end{cases} \tag{6.6}$$

と表される変換であり，しかもそれだけに限る．

**定理 15** 群 PGL$(2,\mathbb{R})$ は，どの 3 点も一直線上にない 4 点の組全体の集合上に推移的に作用する．

この最後の定理より，初等幾何学のいくつかの問題はかなり簡単になる．もし，問題が点と直線の間の関係のみ必要とするなら，任意の与えられた四辺形を別の四辺形にうつす射影変換をつくることができ，解法はもっと簡単になることがある．しかし，思いだしてほしい．射影変換は一般に，角や距離や面積ばかりでなく，直線の線分の比や異なる図形どうしの面積比まで変えてしまう．ただ唯一変わらないものは，直線と複比である．

ここにこの応用例がある．

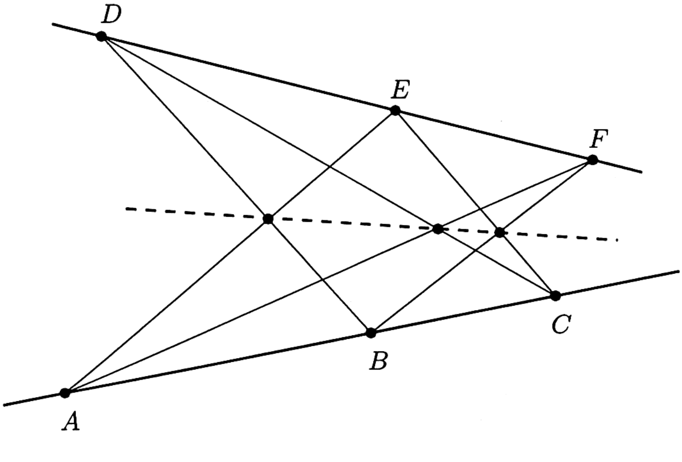



図 6.6　パップスの定理

**練習 141.** パップスの定理を証明せよ (図 6.6 参照): 3 点 $A$, $B$, $C$ と 3 点 $D$, $E$, $F$ がおのおの一直線上にあるとき，3 交点 $AE \cap BD$, $AF \cap CD$, $BF \cap CE$ もまた一直線上にある．

## §6.3　相似変換

**定義 37** 相似変換とは，1つの同じ正の倍率ですべての距離を変える平面変換である．

アフィン変換と同様に，相似変換は，運動全体の族よりも大きい平面変換の族である．定義 37 から明らかに，相似変換全体の集合は変換群である．

相似変換の一番簡単な種類は，**相似拡大変換**である．これは運動とは異なる変換である．

**定義 38** 中心 $A$，係数 $k \neq 0$ の**相似拡大変換** $H_A^k$ とは，平面上の任意の点 $M$ を $\overrightarrow{AM'} = k \cdot \overrightarrow{AM}$ となる点 $M'$ にうつす変換である (図 6.7 参照).

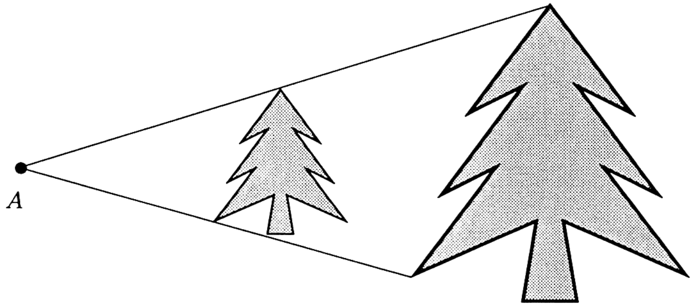



図 6.7　相似拡大変換

平面の相似拡大変換全体の集合は群をなさないが, ある固定点をもった相似拡大変換全体の集合は群をなす．複素座標 $z$ を用いて，このような変換を式 $z \mapsto kz$ で表すことができる．ただし，$k$ は 0 でない実数である．したがってこの群は，積を演算とする 0 でない実数の群 $\mathbb{R}^\star$ に同型である．

**練習 142.** $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})/\mathbb{R}^\star \cong \mathrm{PGL}(1,\mathbb{R})$ を証明せよ．$\cong$ は同型を表す．

以下は，相似拡大変換によって解ける初等幾何学の問題である．

**問題 51** 与えられた三角形 $ABC$ に正方形を内接させよ．

**解答.** 3頂点が三角形 $ABC$ に内接している正方形を描くのはやさしい (図6.8の正方形 $KLMN$ 参照).

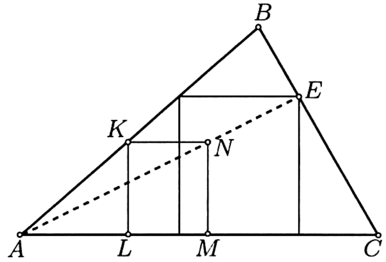



図 6.8　三角形に四角形を内接する

図6.8のように, 点 $A$ を中心とする任意の相似拡大変換によって, 正方形 $KLMN$ の3頂点は三角形 $ABC$ の辺上にうつる. あとは相似拡大変換 $H_A^k$ が点 $N$ から, 辺 $BC$ 上の点 $E$ にうつすような係数 $k$ を求めればよい. 構成法は図6.8の通りである.

**練習 143.** 与えられた三角形 $ABC$ 内に3辺がそれぞれ三角形 $ABC$ の辺に平行な三角形を内接させよ.

相似拡大変換のもう1つの便利な性質は, それが直線の向きを保存することである. すなわち, 直線 $l$ の像はつねに $l$ に平行な直線となる. このことを次の問題に適用してみよう.

**問題 52** 円周 $S$ 上に2点 $M$, $N$ がある. 弦 $MN$ と1つの弧 $\widetilde{MN}$ で囲まれる弓形の部分にいくつかの円 $S_1$, $S_2$, ... が内接している (図6.9). $A_i = S_i \cap \widetilde{MN}$, $B_i = S_i \cap MN$ とすると, すべての直線 $A_1B_1$, $A_2B_2$, ... は, ある *1* 点で交わることを証明せよ.

**解答.** 任意の直線 $A_iB_i$ が点 $C$ を通ることを示す. ただし, $C$ は図6.9にあるように, 弦 $MN$ に平行で, しかも $S$ に接する直線 $l$ 上の接点とする. 中心 $A_1$, 係数 $k = OA_1 : O_1A_1$ の相似拡大変

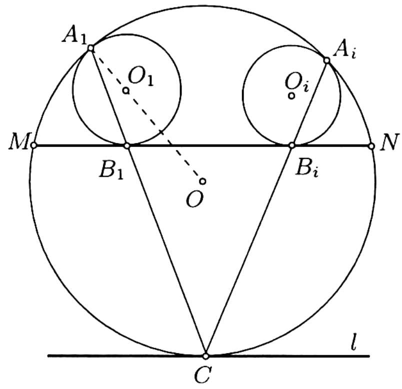



図 6.9 円の弓形に内接された円

換を $h_1$ とする．$h_1$ は $S_1$ (中心を $O_1$ とする) を $S$ にうつす．したがって，$S_1$ に接する直線 $MN$ の像は $MN$ に平行な直線で，$S$ に接する $l$ である．$B_1 = S_1 \cap MN$ より，$h_1(B_1) = C$．同様のことが，おのおのの $S_i$ に対して成り立つ．これで示せた．

**練習 144.** 2 つの同心円に対して，その 2 つの円と 4 つの連続点 $A$, $B$, $C$, $D$ で交わり，関係式 $AB = 2BC = CD$ をみたす直線を構成せよ．

**練習 145.** 三角形が与えられたとき，その三角形のおのおのの辺の中点を通り，その辺の対角の 2 等分線に平行な 3 直線は，ある 1 点で交わることを証明せよ．

**練習 146.** **9 点円 (くてんえん) の定理またはオイラー円の定理** 任意の三角形 $ABC$ に対して，次の 9 点を通る円が存在することを証明せよ：三角形 $ABC$ のおのおのの辺の中点 (3 点)，頂点からの垂線の足 (3 点)，線分 $KA$, $KB$, $KC$ の中点 (3 点)，ただし，$K$ は三角形 $ABC$ の垂心とする．

平面の相似変換全体の群は，相似拡大変換全体の集合より集合として大きい．

**定義 39** 螺旋相似変換は，中心が同じの相似拡大変換と回転の合成として定

義される (図 6.10 参照).

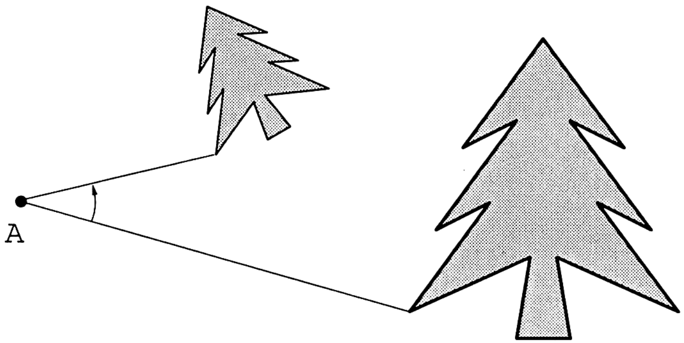



図 6.10　螺旋相似変換

本書では，このような変換に，複素数について学んだときでくわした．すなわち点の複素数 $a$ 倍は，係数 $|a|$ の相似変換をしたあと，原点の回りに偏角 $\arg a$ だけ回転する変換に等しい (§2.4 参照)．螺旋相似変換の幾何学的な応用問題をいくつか考えよう．

**問題 53** 任意の三角形 $ABC$ に対して，$P, Q$ を $\angle APB = \angle BQC = 90°$, $\angle ABP = \angle CBQ = \beta$ をみたす $\triangle ABC$ の外側の 2 点とする (図 6.11)．このとき，$\triangle PQK$ の頂点角すべてを求めよ．ただし，$K$ は辺 $AC$ の中点とする．

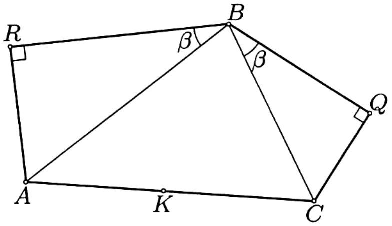



図 6.11　三角形 $ABC$ の辺上に描かれた直角三角形

**解答.** 2 つの螺旋相似変換を考える：$F_P = H_P^k \circ R_P^d$, $F_Q = H_Q^{1/k} \circ R_Q^d$. ただし，$d = 90°, k = PB : PA = QB : QC$ とする．明らかに $F_P(A) = B, F_Q(B) = C$ であるから，$(F_Q \circ F_P)(A) = C$. 一般に，2 つの螺旋相似変換が合成されると，係数はかけられ，回転角は足される (少しあとで説明する)．したがって，$F = F_Q \circ F_P$ は 180° 回転でなければならない．$F(A) = C$ より，その回転の中心は $K$ となる．よって $F(K) = K$. $F_P(K) = K_1$ とすると，$F_Q(K_1) = K$ だから 2 つの直角三角形 $KPK_1$, $QKK_1$ はどちらも頂点 $K_1$ で同じ角 $\beta$ をとる．よって，この 2 つの三角形は合同である (図 6.12)．ゆえに，$PQ \perp KK_1$, $\angle KPQ = \angle KQP = \beta$.

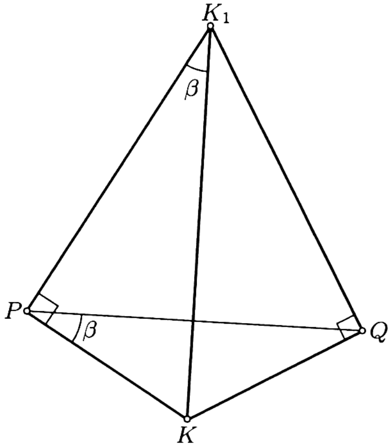



図 6.12　螺旋相似変換の積

先の議論では，2 つの螺旋相似変換の合成は，係数がその 2 つの螺旋相似変換のそれぞれの係数の積で，回転角がそれぞれの回転角の和であるような螺旋相似変換であることを使った．この事実は，2 つの螺旋相似変換の中心が一致するときは明らかである．このことを複素数を用いて一般的な条件で証明してみよう．それには，次の定理が必要である．

**定理 16** 平面変換が相似変換であるための必要十分条件は，複素座標 $z$ を用いて，

$$z \mapsto pz + a \tag{6.7}$$

あるいは

$$z \mapsto p\bar{z} + a \tag{6.8}$$

と書けることである．ただし $p, a$ は任意の複素数，$p \neq 0$ である．2 つの場合 (6.7), (6.8) はそれぞれ真の (すなわち方向保存の) 変換, 真でない (すなわち方向を逆にする) 変換に対応する．

**証明** 事実，真の平面運動が線形関数 $w = pz + a \quad (|p| = 1)$ に対応していることは (2.3) において示した．いま，$F$ を相似変換，すなわち $F$ をある拡大率 $k$ によってすべての距離を引き延ばし (あるいは，縮め) かつ，方向を変えない変換とし，$H$ を係数 $k$ の原点中心の相似変換とする．このとき，$H^{-1} \circ F$ は距離と方向を変えない変換である．よって，それは真の運動で，$w = pz + a \quad (|p| = 1)$ に対応する．このとき，変換 $F = H \circ (H^{-1} \circ F)$ は $w = k(pz + a)$ と書ける．この式は任意の線形関数を表している．

逆に，任意の複素関数 $pz + a$ が与えられたとき，それは要素 $k = |p|$ によって点間の距離を伸ばす (あるいは，縮める) ことが，次のように確かめられる：

$$|(pz_1 + a) - (pz_2 + a)| = |p| \cdot |z_1 - z_2|.$$

その合成は次のようになる．

真でない変換の場合は関数 (6.8) が関数 (6.7) と標準的な対称変換 $z \mapsto \bar{z}$ の合成であることから，真の変換の場合に帰着される．　□

§6.1 の用語や記号を用いると，定理 16 は，真の相似変換の群が，$\mathrm{Aff}(1, \mathbb{C})$ であることを意味する．ただし，$\mathbb{C}$ は複素数を表す．

複素数で相似変換を表すことによって，互いに関連する次の 2 つの重要な事実を証明できる：

- 移動でない任意の相似変換 $pz + a$(つまり，$p \neq 1$) は，ただ 1 つの不動点をもつ．
- 移動でない任意の相似変換 $pz + a$ は，螺旋相似変換 (とくに，相似拡大変換) である．

以上を確かめてみよう．不動点とは $pz_0 + a = z_0$ となる数 $z_0$ である．$p \neq 1$ ならば，この方程式はただ 1 つの解 $z_0 = a/(1-p)$ をもつ．したがって，一番目の主張は成り立つ．

また，式

$$pz + a = p\left(z - \frac{a}{1-p}\right) + \frac{a}{1-p}$$

は，この変換が中心 $a/(1-p)$，引き延ばし係数 $|p|$，回転角 $\arg p$ の螺旋相似変換であることを示している．よって，二番目の主張も成り立つ．

ここで，問題 53 の解答で用いた次の性質を証明する．

『任意の螺旋相似変換 $F_1$, $F_2$ に対して，合成 $F_1 \circ F_2$ の係数は ($F_1$ の係数)×($F_2$ の係数)，$F_1 \circ F_2$ の回転角は ($F_1$ の回転角)+($F_2$ の回転角) である.』

事実，$w = pz + a$, $u = qw + b$ を 2 つの螺旋相似変換とすると，その合成は次のようになる．

$$u = q(pz + a) + b = pqz + (aq + b)$$

この式は，係数が $|pq| = |p||q|$，回転角が $\arg(pq) = \arg p + \arg q$ の螺旋相似変換を表している．

**練習 147.** 2 枚の透明な紙にそれぞれ異なる縮尺で同じ国の地図が描かれている．このとき，1 つの地図を，もう 1 つの地図の上に完全に覆いかぶさるように置くと，ある点をピンで突き刺せば，それは 2 枚とも同じ場所を表すようにできることを証明せよ．

**練習 148.** 平面上に $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$ となる 4 点 $A$, $B$, $C$, $D$ が与えられているとき，三角形 $ABE$ と三角形 $CDE$ が合同になるような点 $E$ が存在することを証明せよ．

**練習 149.** 三角形 $ABC$ の外側に，おのおのの辺を一辺とする正方形が描かれている．$M$, $N$, $P$ をそれぞれ辺 $AB$, $BC$, $CA$ を一辺とする正方形の中心とするとき，次の等式が成り立つことを示せ．$NP \perp CM$, $|NP| = |CM|$.

## §6.4 反転

**問題 54** 円 $S$ は，2 点 $A$, $B$ でそれぞれ円 $S_1$, $S_2$ に接している．このとき，直線 $AB$ は，$S_1$ と $S_2$ の間の相似変換の中心を通ることを証明せよ．

**解答．** 直線 $AB$ と直線 $O_1O_2$ の交点を $K$ とする (図 6.13 参照)．$K$ が $S_1$ と $S_2$ の間の相似変換の中心であることを証明したい．まず，かなり間接的な方法でこの相似変換を構成しよう．

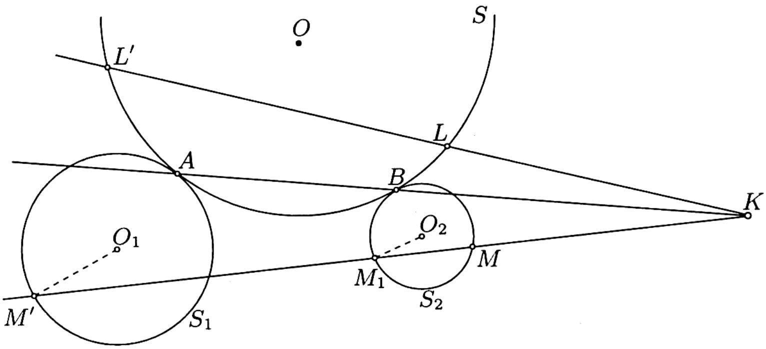



図 6.13　接する 3 円

$f$ を，平面上の任意の点 $M$ を $KM \cdot KM' = KA \cdot KB =$ 定数 となる点 $M' \in KM$ にうつす変換とすると，明らかに，$f(A) = B$, $f(B) = A$ となる．

$S$ は，$f$ によってそれ自身にうつることに注意しよう．これは，初等幾何学でよく知られている次の定理から導かれる (知らなければ，自分で証明してみよう)．

『固定された円 $S$, 固定された点 $K$, $K$ を通り 2 点 $L$, $L'$ で $S$ と交わる直線 $l$ に対して，$|KL| \cdot |KL'|$ の値は，$l$ のえらび方に依らず一定である．』

点 $M \in S_2$ をとる．その像 $M' = f(M)$ は，次の式をみたす半直線 $KM$ 上の点である．

$$KM' = \frac{KA \cdot KB}{KM}$$

$M_1$ を $S_2$ と $KM$ との二番目の交点とする．先に引用した定理により，$KM \cdot KM_1 = C =$ 定数 だから

$$KM' = \frac{KA \cdot KB}{C} \cdot KM_1$$

この式は，点 $M'$ が中心 $K$ のある相似変換による $M_1$ の像であることを意味する! したがって，$f$ による $S_2$ の像は，ある円である．これを $S_2'$ とする．$S_2$ は点 $B$ を通り，点 $B$ で $S$ に接しているので，$S_2'$ は $A$ を通り $A$ で $S$ に接する．ゆえに $S_2' = S_1$.

したがって，中心 $K$ の相似変換によって $S_2$ から $S_1$ にうつる

**定義 40** 中心 $O$，半径 $R$ の円 $T$ に関する反転とは，平面上の任意の点 $M$ を $OM \cdot OM' = R^2$ となるような半直線 $OM$ 上の点 $M'$ にうつす変換である．

問題 54 の変換 $f$ は反転の 1 つの例である．

定義における反転は，$T$ の内側の部分を外側の部分にうつし，$T$ の外側の部分を内側の部分にうつす．また，$T$ を $T$ にうつす．H. ペタード[1]のよく知られた冗談話「A contribution to the mathematical theory of big game hunting」がある．それは，ライオンを捕らえる次のような方法を提案している．ハンターが檻に入って待つ．ライオンが現れたら，ハンターは反転を施す．そうすれば，ライオンは檻の中に入る．

定義の反転は，ほぼ1 対 1 の平面変換である．つまり，円の中心 $O$ を除くすべての点で定義されていて，そこで 1 対 1 対応となる．$M$ が中心 $O$ に向って動くとき，$M$ の像 $M'$ は中心 $O$ から無限に離れてゆく．このような理由で，p.161 で直線の射影変換に行ったように，平面に 1 点 $\infty$ (“無限大”) を加える．そして，反転を拡張された平面の 1 対 1 変換とみなすのである．

ここで扱う平面は複素平面であると仮定する．承知のように，任意の複素数 $z$ とその複素共役 $\bar{z}$ は関係式 $z\bar{z} = |z|^2$ をみたす．したがって，中心 0, 半径 $r$ の反転に対する代数的な式は $z \mapsto r^2/\bar{z}$ である．

---

[1] H. Petard, of Princeton, NJ のこと．これは，ある数学科の学生グループの筆名である．http://abel.math.umu.se/ frankw/lion.html 参照.

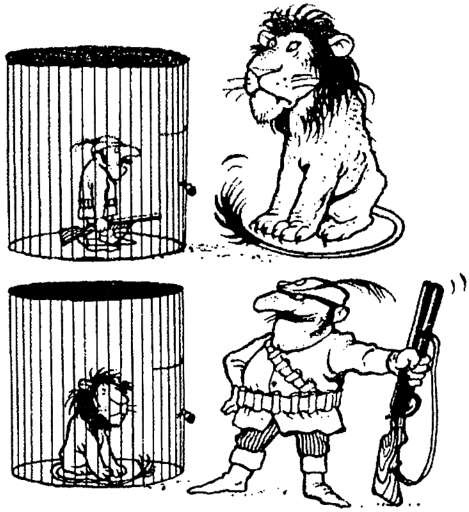


図 6.14　反転によるライオンの捕らえ方 (H. ペタードによる)

**練習 150.**　固定された中心 $O$ をもつ反転全体の集合によって生成される群はなにか.

問題 54 の議論を注意してもう一度たどると，反転 $f$ の中心を通らない任意の円が，$f$ によって円にうつることがわかる.

**練習 151.**　反転の中心を通る円のその反転による像を求めよ.

**練習 152.**　反転による直線の像を求めよ.

これらの事実をすべてよせ集めると，反転は直線や円の集合を保存することがわかる．直線を無限遠点を通過する円とみなすと，反転は円変換といえる．すなわち (一般化された) 円全体の族を保存する変換である．あとで，円変換全体の集合は反転全体の集合より集合として大きいことがわかるだろう.

初等幾何学における反転の応用例をいくつかあげておく.

**問題 55** 図 6.15a のように，4 つの円がおのおのそのうちの隣りの 2 つの円に接している．このとき，その 4 接点はある *1* つの円周上にあることを証明せよ．

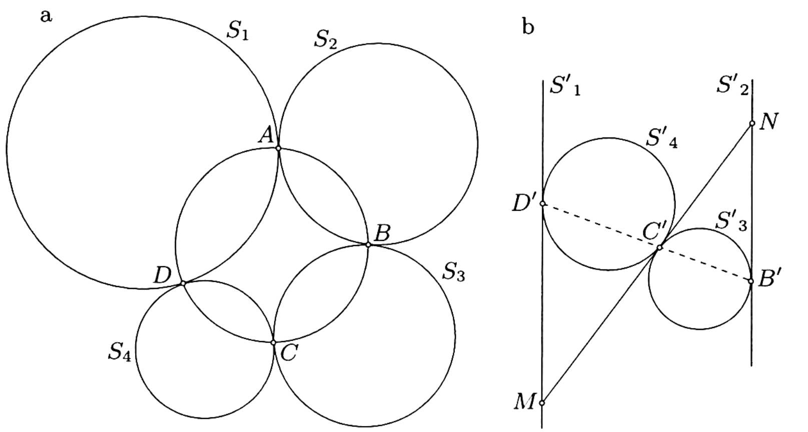



図 6.15　接する 4 円

**解答．** 中心 $A$(接点の 1 つの) の円 (半径はなんでもよい) に関する反転 $f$ を適用しよう．この平面変換のあと，この問題は簡単になる．$S'_i = f(S_i)$ $(n = 1, 2, 3, 4)$ とする．先の議論から $S'_1$ と $S'_2$ は直線で，$S'_3$ と $S'_4$ は円であることがわかる．$S'_i$ 間の接触の関係は，$S_i$ 間の接触の関係と同じである．すなわち，$S'_1$ は $S'_2$ に，$S'_2$ は $S'_3$ に，$S'_3$ は $S'_4$ に，$S'_4$ は $'S_1$ に接する．また，$S'_1$ と $S'_2$ は平行でなければならない．なぜなら，$S_1$ と $S_2$ とにはただ 1 つの共通点があり，その共通点はその反転によって無限遠点にうつるからである．このように，$f$ による図 6.15a の像は，図 6.15b のような配置になる．この問題は，3 接点 $B'$, $C'$, $D'$ が一直線上にあることを示せばよい —— 一直線上にあるとは，3 点 $B'$, $C'$, $D'$ の逆像 $B$, $C$, $D$ が $A$ を通る円周上にあることということだからである．

3 点 $B'$, $C'$, $D'$ が一直線上にあることを示そう．$S'_3$ と $S'_4$ との共通接線を $S'_1$ と $S'_2$ と交わるまで描き，$S'_1$ と $S'_2$ との交点をそれぞれ $M$, $N$ とすると，三角形 $MC'D'$ と三角形 $NC'B'$ は

どちらも2等辺三角形 (つまり $MD' = MC', NB' = NC'$) で，$\angle M = \angle N$ となる．ゆえに，$\angle D'C'M = 1/2(180° - \angle D'MC') = 1/2(180° - \angle C'NB') = \angle B'C'N$. したがって，3点 $B'$, $C'$, $D'$ は一直線上にある．これで示せた．

問題54, 問題55では，2つの曲線が接するとき，反転によるそれらの曲線の像もまた接するという事実を用いた．練習153はこの事実の一般化である．

**練習 153.** 2つの円の交点における円の曲線どうしのなす角とは，その交点を通る2つの円のおのおのの接線がなす角とする．任意の円に関する反転によって，2つの円どうしのなす角は保存されることを証明せよ．

## §6.5　円変換

平面の反転変換全体の集合は変換群ではない．この節では，反転変換全体によって**生成される**群について学ぼう．この群を**円変換群**という．円変換群は，2つの部分からなる．1つは方向を保存する変換全体で，これは部分群をなし，集合として複素射影群 $(1, \mathbb{C})$(p.161 参照) に一致する．残りは方向を逆にする変換である．

これを確かめるための問題をみよう．

**問題 56** $C$ を中心 $O$ 半径 $OB$ の円とし，$A$ を $OB$ の中点とする．また，次の2つの変換を施すと仮定する．$C$ に関する反転，$A$ に関する点対称変換．このとき，これらの変換を繰り返し施すことによって，与えられた点は，最大何個の異なる点にうつるか．

**解答.** 問題における2つの変換を複素関数で表そう．点 $O$ に複素座標0を，点 $B$ に1を対応させるとする．このとき，点 $A$ は1/2に対応する． $A$ に関する点対称は，次の関数で表される．

$$f_1(z) = 1 - z$$

また，定義より反転による $z$ の像 $w$ は次の関係式をみたす：$|z||w| =$

$1, \arg z = \arg w$.

よって，$C$ に関する反転は，次のように表される．

$$f_2(z) = 1/\bar{z}$$

2 つの変換 $f_1$, $f_2$ は対合である．したがって，$f_1$ と $f_2$ との異なる合成関数は，$f_1$ と $f_2$ を代わるがわる施すことによってのみ得られる．$z$ から始めて，まず $z$ に $f_1$ を施し，それから $f_2$，そして再び $f_1$ を施す $\cdots$ と，次のリストを得る．$z$, $1-z$, $1/(1-\bar{z})$, $\bar{z}/(\bar{z}-1)$, $1-1/z$, $1/z$, $\bar{z}$, $1-\bar{z}$, $1/(1-z)$, $z/(z-1)$, $1-1/\bar{z}$, $1/\bar{z}$．この後，$1/\bar{z}$ に $f_2$ を施すと再び $z$ にもどるから，このリストはループ状の列になる．したがって，反転と点対称は，12 個の元で構成される群 ($G$ とする) を生成し，$G$ の任意の軌道の位数は 12 以下であることがわかる．ちょうど 12 個の元を含む軌道の例はあとで述べよう．

**練習 154.** 軌道の濃度として可能なものをあげよ．また，異なる軌道を描け．

$G$ の**基本領域**，すなわち $G$ の作用によるその像が重ならないで平面をおおいつくす平面の一部分を求めよう．

変換 $f_1$ による円 $C$ の像は円 $C'$ であり，変換 $f_2$ による $C'$ の像は直線 $MM'$ である (図 6.16 参照)．

もっと重要な線は直線 $OB$ である．$OB$ によって分けられる 2 つの領域は $z \mapsto \bar{z}$ $(\in G)$ によって互いにうつり合う．これらの直線と円は，平面を群の作用によって互いにうつり合う 12 個の領域に分ける．領域内部の異なる点の軌道は等しくない (交わらない)．

12 個の領域のうちの任意の領域，たとえば領域 1 を $G$ の作用の基本領域としてえらぶことができる．読者には，$G$ の異なる変換による領域 1 の像が何か確かめてもらいたい．

図 6.16 に描かれている 4 個の一般化円 (直線あるいは円のこと) の和集合は，$G$ のある自明でない元によって変わらない平面上の点全体の集合である．任意の内点の軌道はちょうど 12 点からなる．4 個の一般化円上の点で交点で

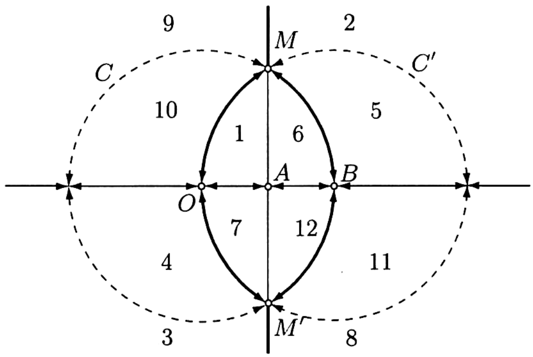



図 6.16　$z \mapsto 1-z$ と $z \mapsto 1/\bar{z}$ によって生成される複素関数の群．

ない点が属する軌道の濃度は6である．交点は3つの軌道に分かれている：長さが3の軌道2つ $(1/2, 2, -1$ と $0, 1, \infty)$ と長さが2の軌道1つ $(1/2 \pm i\sqrt{3}/2$ に対応する点 $M$, $M')$.

図6.16の4個の一般化円は，交差点によって18本の線分に分かれる．これらの線分は $G$ の作用によって互いにうつり合い，長さ6の3つの軌道に分類される．図の実線と太線と破線は，その3つの軌道を表している．

さて，任意の複素係数をもつ一次分数変換 (すなわち，群 $\mathrm{PGL}(1, \mathbb{C})$ の元とまた，$z$ を共役変数 $\bar{z}$ でおきかえた同様の関数) によって表される平面変換の幾何学的な意味を学ぼう．

**定理 17** $ad-bc \neq 0$ をみたす複素数 $a, b, c, d$ に対して，次のことが成り立つ．

1. 関数
$$w = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$$
によって定義される変換 (真でない一次分数変換) は，反転変換と螺旋相似変換との合成である．

2. 関数
$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$
によって定義される変換 (真の一次分数変換) は，反転変換と螺旋相似変換と対称変換の合成である．

**証明** $c=0$ のとき，2 の式は線形関数 $a_1z+b_1$ となる．すでにみたように，これは相似変換を表している．1 の式は $a_1\bar{z}+b_1$ となり，これは $\bar{z}$ に関する線形関数で，対称変換 $z\to\bar{z}$ と相似変換の合成である．

$c\neq 0$ のとき，$\dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ は

$$\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}=p\left(\frac{1}{\bar{z}-z_0}+z_0\right)+r$$

と書ける．ただし，$z_0=-d/c$, $p=(bc-ad)^2/c^2$, $r=a/c-pz_0$ である．かっこ内の式は，(中心 $O$, 半径 1 の) 標準的な反転の変換 $z\mapsto z+z_0$ による共役である．したがって，それは，中心 $z_0$，半径 1 の反転を表している．その反転を施したあと，相似変換 $z\mapsto pz+r$ が施されて，求める合成を得る． □

真の一次分数変換 $(az+b)/(cz+d)$ は，変換 $z\mapsto\bar{z}$ によって，真でない一次分数変換に変わる．そして，この定理の二番目の式が得られる．このとき，真でない変換は方向を変える変換であるが，真の変換より扱い易くなるのは奇妙なことである．このことは，この文脈において反転がいかに重要であるかを説明している —— そして，反転は真ではない変換である．

**練習 155.** (真および真でない) 一次分数変換全体の集合 $G$ は，群をなすことを証明せよ．また，真の一次分数変換全体の集合 $H$ は，$G$ の正規部分群であることを確かめ，商群 $G/H$ を求めよ．

定理 17 によって，どちらの一次分数変換の族も**円変換**であることがわかる．すなわち，どちらの変換も平面上の一般化された円の集合 (円と直線) を保存する．任意の円変換は，真あるいは真でない一次分数変換のどちらかで表されることが知られている．そんなわけでこのような変換全体の群を**円群**という．一次分数変換のもう 1 つの注目すべき性質は，それらの変換が**等角**なことである．すなわち，曲線どうしのなす角がそれらの変換によって変わらない．しかし，等角な写像全体の集合は，円変換全体の集合よりも集合としてずっと大きい．たとえば，等角な写像には複素関数 $P(z)/Q(z)$ がある．ただし，$P$, $Q$ は任意の多項式である．

**練習 156.** 次の式によって与えられる複素平面変換全体の集合は，群を

なすことを証明せよ：

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad ad-bc>0 \tag{6.9}$$

$$w = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad ad-bc<0 \tag{6.10}$$

## §6.6　双曲幾何学

(6.9), (6.10) 式の $w$ は，上半平面 $y>0$ からそれ自身への写像であることを確かめよう．$z=x+iy$, $w=u+iv$ とおくと，簡単な計算で複素式 (6.9) は，次の実数式の組に等しいことがわかる．

$$u = \frac{(ax+b)(cx+d)+acy^2}{(cx+d)^2+y^2}$$

$$v = \frac{(ad-bc)y}{(cx+d)^2+y^2}$$

よって，$v$ は $y$ と同符号である．(6.10) も同様である．

$L$ を上半平面 $H=\{(x,y)|y>0\}$ 上に作用する変換 (6.9), (6.10) 全体の群とする．$H$ を**双曲平面**または**ロバチェフスキー平面**といい，$L$ を $H$ の**双曲的な運動の群**という．この言葉には次のような意味がある．

すでにみたように，$L$ のひとつの変換によって，任意の円は円 (あるいは，円の特別な場合として直線) にうつる．$H$ の点集合で，$L$ の変換によって変わらないものがある．これらは，(半) 円や直線 $Ox$ に垂直な (半) 直線である (図 6.17 参照)．$H$ の任意の 2 点を通るただ 1 つの半円があるという理由で，これらの半円や半直線を **$L$-直線**という ── これは，ユークリッド平面の直線にもある性質である．

双曲的な運動の群 $L$ には，ユークリッド平面上に作用する平面運動の群と似た性質がある．とくに，任意の点は他の点に双曲的な運動によってうつることができる．しかも，$L$-線分 ($L$-直線の弧) 全体の集合上への $L$ による作用は，推移的ではない．双曲平面と，ユークリッド平面との幾何学的な主な違いは，平行直線について考えるとき現れてくる．

ふつうの ユークリッド幾何学においては，2 つの直線が交わらないなら，平行であるという．平行線の主な特徴は任意の直線 $a$ と $a$ 上にない任意の点

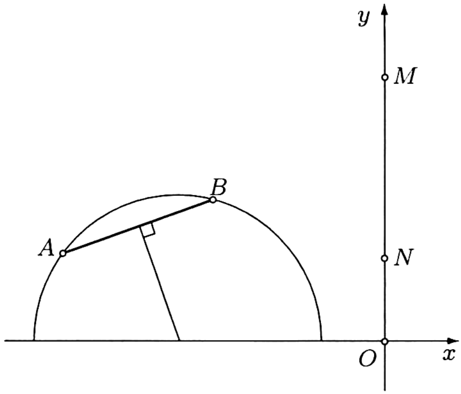



図 6.17　双曲平面における $L-$ 直線

$A$ に対して，$A$ を通り $a$ に平行な直線がちょうど 1 つ存在することである．図 6.18 をみてみよう．それは $L$-直線 $l$ と $L$-点 $A$ を示している．$A$ を通る 4 直線の中に $a$ と交わる直線が 1 本存在し (直線 $l$), $a$ と共通点のない直線が 3 本存在する (直線 $k$, $n$, $m$)．このように，ロバチェフスキー幾何学においては，与えられた点を通り，与えられた直線と交差しない多くの直線を描くことができる．

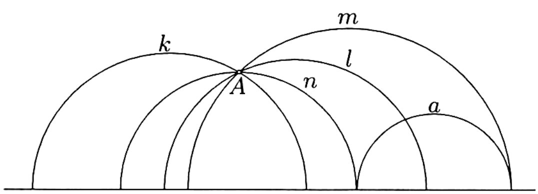



図 6.18　2 本の $L-$ 直線の相互間にみられる位置

ロバチェフスキー幾何学における角の計算をしてみよう．2 つの $L$-直線の間の角はその接線間のふつうの ユークリッド角として定義される (角の定義より，$L$-運動によって $L$-角は変わらないことに注意しよう)．

**問題 57** 図 6.19 のように，3 点 $A$, $B$, $C$ の座標をそれぞれ $(0,7)$, $(4,3)$, $(0,5)$ とする．このとき，ロバチェフスキー三角形 $ABK$ の頂点角の総和を求めよ．ただし，$L-$ 辺 $BK$ は点 $O$ を中心とする円の弧とし，$L-$ 辺 $AB$

は点 $M$ を中心とする円の弧とする．

**解答．** $L-$ 三角形 $ABK$ は図 6.19 の斜線の領域である．

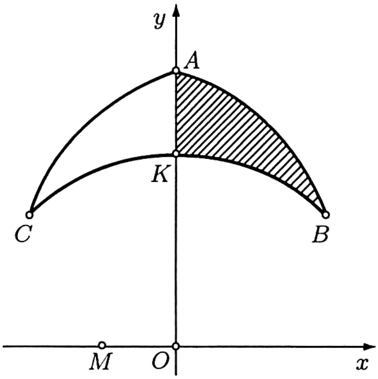



図 6.19　双曲平面における三角形

辺 $AK$ は軸 $Oy$ 上にある．辺 $KB$ は $O$ を中心とする円の弧である．辺 $AB$ は $M$ を中心とする円の弧である．

**練習 157．** 点 $M$ の座標を求めよ．

頂点 $K$ の角は直角である．なぜなら，その角は円とその半径のなす角だからである．

$$\angle K = 90^\circ$$

2円のなす角 $B$ はその接線間の角に等しい．したがって，その半径間の角に等しい．

$$\angle B = \angle OBM$$

同様に

$$\angle A = \angle OMA$$

$M$ の座標は次のように求められる．

$$\begin{aligned}\tan\angle OMA &= \frac{7}{3}\\ \tan\angle OBM &= \tan(\angle BOB_1 - \angle BMB_1) = \frac{9}{37}\\ \tan(\angle A + \angle B) &= \frac{\frac{7}{3}+\frac{9}{37}}{1-\frac{7}{3}\cdot\frac{9}{37}} = \frac{143}{24}\end{aligned}$$

$\tan(\angle A + \angle B) > 0$ より，$\angle A + \angle B < 90°$ である．ゆえに，$L$-三角形 $ABK$ の頂点角の総和は $180°$ よりも小さい．つまり，$\angle A + \angle B + \angle K < 180°$.

興味深いことは，ロバチェフスキー三角形が (ある意味で) 大きければ大きい程，頂点角の総和は小さくなることである．たとえば，二等辺三角形 $ABC$ の面積は三角形 $ABK$ の面積の 2 倍であるが，三角形 $ABC$ の頂点角の総和は三角形 $ABK$ の頂点角の総和より小さい．

最後に，双曲平面における結晶群の例を 1 つあげておく —— いわゆるモジュラ群といわれる一次分数変換の集合 $U$ である．

$$U = \left\{\frac{az+b}{cz+d} \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{Z}\right\}$$

群 $U$ は，次の 2 つの元によって生成される．

$$S : z \mapsto -1/z \quad , \quad T : z \mapsto 1 + z$$

**練習 158.** 関係式 $S^2 = ST^3 = \mathrm{id}$ を確かめよ．

図 6.20 は，$U$ の基本領域

$$\Phi = \{z = x + yi \,|\, |z| \geq 1,\, |x| \leq \frac{1}{2}\}$$

と $T, S, T^{-1}, TS, ST$ などによるその像を示している．

領域 $\Phi$ は事実，$L$-三角形で有限面積をもつ (ロバチェフスキー幾何学においてはこの面積を定義していないので，読者は確かめられない！) $\Phi$ のコピーは重ならないように上半平面をすべて覆う．したがって，$U$ は結晶群である．読者には，あるモチーフを描いてもらい，$U$ の作用を用いてロバチェ

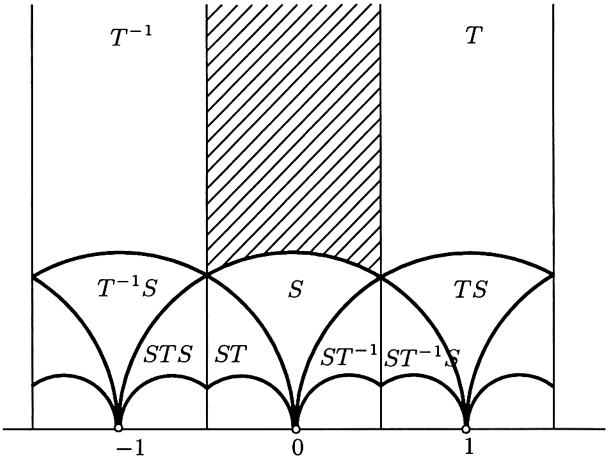



図 6.20　モジュラ群の基本領域

フスキー平面をすみからすみまで覆うように繰り返しそのモチーフを描いてもらいたい．そうすることによって，双曲的敷き詰め模様が得られるからである．

# 第7章 微分方程式の対称

この章では，変換群を微分方程式の解法に応用する．導関数や不定積分については既知とする．

## §7.1 常微分方程式

本書では，微分方程式の一番簡単な例である**導関数に関して解ける 1 階の常微分方程式**のみを扱う．

**定義 41** 微分方程式とは，次の形の方程式である．

$$y' = f(x, y) \tag{7.1}$$

ただし，$y$ は $x$ に依存する変数で，プライム $'$ は $x$ に関する導関数を意味し，$f(x,y)$ は $x$ と $y$ の *2* 変数関数で「十分よい (連続で微分可能な)」ものと仮定する．

**定義 42** 微分方程式 (7.1) の解とは，(7.1) 式に代入すると真の恒等式となるような関数 $y = \phi(x)$ のことである．すなわち，任意の $x$ の値に対して，次の式が成り立つ．

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x))$$

$y$ が $x$ にどのように依存するかに興味があるので，$x$ を **独立変数**, $y$ を**従属変数**とよぶことにする．(7.1) 式は $dy/dx = f(x, y)$ とも書かれる．ただし，$dy/dx = y'$ で，$dy$, $dx$ はそれぞれ，$y$, $x$ の非常に小さい (“無限小の”)

増分である．この $dy, dx$ を**微分**という[1]．

例えば次の微分方程式を考えてみよう．

$$y' = y - x \tag{7.2}$$

直接代入することによって，$y = x + 1$ と $y = e^x + x + 1$ はどちらも，微分方程式 (7.2) の解であることが確かめられる．

常微分方程式理論の主な定理は，どのような微分方程式に対しても，その解の集合が 1 パラメーター族 $y = \psi(x, c)$ として表されることである．このような関数 $\psi(x, c)$ は与えられた微分方程式の**一般解**とよばれる．たとえば，微分方程式 (7.2) の一般解は $y = ce^x + x + 1$ である．その一般解は $c = 0$ と $c = 1$ のとき，それぞれ特殊解 $y = x + 1, y = e^x + x + 1$ となる．

微分方程式の解の族 $\psi(x, c)$ は任意の 1 パラメーター関数族ではないことに注意しよう．

**練習 159.** 次の特殊解の組をもつ (1 階の) 微分方程式は存在するか：
(*a*) $y = 0, y = 1$ (定数関数)　　(*b*) $y = 1, y = x$

微分方程式 (7.1) の右辺の関数 $f(x, y)$ は $x$，あるいは $y$，あるいは $x, y$ 両方を自由にとれる．たとえば，次のような方程式を考えることができる．

$$y' = 2 \tag{7.3}$$

$$y' = \cos x \tag{7.4}$$

$$y' = y^2 \tag{7.5}$$

**練習 160.** 微分方程式 (7.3), (7.4) の一般解を求めよ．また，微分方程式 (7.5) の特殊解を推測せよ．

(7.3), (7.4) 式は，その右辺が $x$ だけに依存する次の形の微分方程式である．

$$y' = f(x) \tag{7.6}$$

---

[1] 現代的な立場からみると，微分の概念は**微分形式**で形式化されているが，本書ではそのことに触れないで，17，18 世紀の数学者に従って，直感的意味での微分を扱う．

よく知られているように，このような微分方程式の一般解は不定積分

$$y = \int f(x)dx \tag{7.7}$$

によって求められる．ただし，右辺は「定数を足すことを除いて同じ」ものと定義されている．もっと正確に言うと，$F(x)$ が $f(x)$ のある**原始関数**，すなわち $F'(x) = f(x)$ となる関数であるならば，微分方程式 (7.6) の一般解は次のように書かれる．

$$y = F(x) + C \tag{7.8}$$

任意定数 $C$ を含むこの式は，微分方程式 (7.6) のすべての解である．関数 (7.8) のすべてのグラフは互いに交わることはなく，$(x, y)$ 平面全体を占める．たとえば，微分方程式 (7.4) の一般解は図 7.1a のグラフで表される．

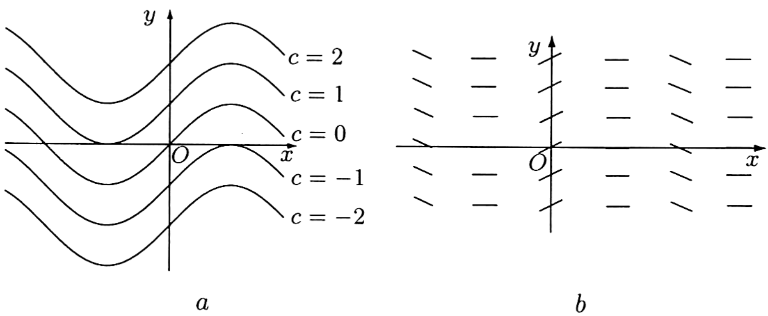



**図 7.1**　微分方程式 $y' = \cos x$ の解曲線と方向場のグラフ

微分方程式の解の集合ばかりでなく，微分方程式自身を幾何学的な対象として描くことができる．微分方程式 $y' = f(x, y)$ が意味することは，点 $(x, y)$ における (わかっていない) 解のグラフの傾き (もっと正確には，傾きの角の正接) は，わかっている数 $f(x, y)$ に等しいということである．よって，平面の任意の点 $(x, y)$ における積分曲線 (ある解のグラフ) が通過する方向がわかる．結局次のことがわかる．**微分方程式 (7.1) と関連する幾何学的対象は平面の方向場である．**方向場は，いたるところで固定されていて平面上の任意の点に対してその点を通るある直線を定義している．

微分方程式の求積法の問題は，幾何学的には次のように明確に述べられる．**平面上に方向場が与えられたとき，その与えられた場にいたるところで接す**

**る曲線すべてを求めよ．** このような曲線を方向場の**積分曲線**という．図 7.1, 図 7.2 はそれぞれ微分方程式 (7.4) と (7.2) に対応する方向場と積分曲線の族を示している．

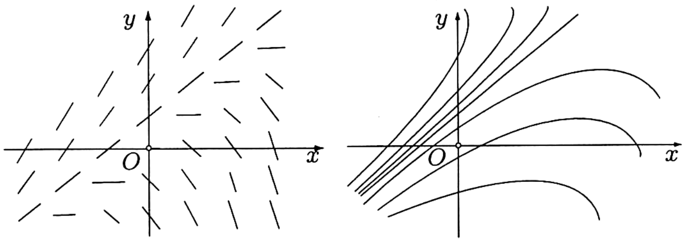



図 7.2　別の微分方程式の解と方向場のグラフ

**練習 161．** 微分方程式 (7.3), (7.5) に対する方向場と積分曲線族を描け．

**練習 162．** 図 7.3 に示されている方向場の積分曲線はなにか．また，この場はなんらかの微分方程式に対応しているか．

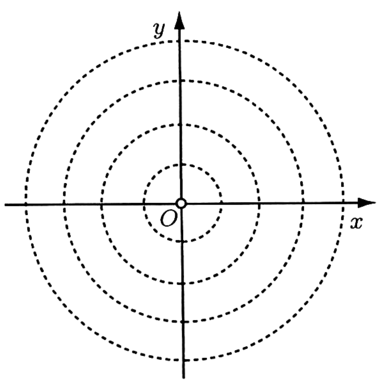



図 7.3　平面上の方向場

不定積分だけを使って ($y$ と独立な)(7.6) 式の形の方程式ばかりでなく，次の形の方程式も求めることができる．

$$y' = f(x)g(y) \tag{7.9}$$

これは，次の古典的な方法によって解かれる．$y'$ を 2 つの微分の比 $dy/dx$ とし (つまり $y' = dy/dx$ とおく)，(7.9) を書き直すと，次のようになる．

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \tag{7.10}$$

みてわかるように，その変数は分離されている．すなわち，左辺は $y$ だけの関数，右辺は $x$ だけの関数である．このため，(7.9) の形の方程式を**変数分離形の方程式**という．(7.10) 式の両辺を積分すると，

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx \tag{7.11}$$

となる (この方程式の右辺，または左辺は任意定数 $C$ が含まれていると考える)．これは，(7.9) 式の一般解を含む方程式である．したがって，$y$ が $x$ で表される関数ならば，一般解を得ることができるのである．

**問題 58** 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$y' = (2x+1)/(3y^2) \tag{7.12}$$

**解答．** この方程式を微分で書き直すと，$3y^2\,dy = (2x+1)\,dx$ となる．その不定積分を求めると，$y^3 = x^2 + x + C$ を得る．ゆえに，$y = \sqrt[3]{x^2+x+C}$．これが (7.12) 式の一般解である．

変数分離形の方程式 (7.9) の特別な場合は，その方程式の右辺がただ 1 つの変数 $x$，または $y$ だけに依存するものである．

**練習 163．** 微分方程式 (7.5) の一般解を求めよ．

## §7.2 変数変換

微分方程式と本書のメインテーマ —— 平面変換 —— との関係についての議論にうつろう．

微分方程式のいろいろな解法においてきわめて重要な役割を果たすのが変数変換である．公式

$$\begin{cases} u = \varphi(x,y) \\ v = \psi(x,y) \end{cases} \tag{7.13}$$

に従って，変数 $x, y$ を新しい変数 $u, v$ に変えると，方程式 $y' = f(x,y)$ は，別の方程式

$$v' = g(u,v) \tag{7.14}$$

に変わる．ただし，この「$'$」は $x$ ではなく，$u$ に関する導関数を意味している．このとき，もし，この方程式の変数が分離するならば，この方程式は解ける．(7.13) 式を用いて，最初の変数に戻すと元の方程式の解が得られる．

これまで述べたことは，最も簡単なものであるが積分法の大変有効なものである．すなわち変数分離形の方程式を導く変数変換をすることである．

**問題 59** 変数分離形の方程式に変えることによって，微分方程式 (7.2)$y' = y - x$ を解け．

**解答．** 次の変数変換をしよう．

$$\begin{cases} u = x \\ v = y - x - 1 \end{cases}$$

$u = x$ であるから，$u$ に関する導関数は $x$ に関する導関数である．よって，どちらも「$'$」で表して，混乱は起こらない．次に，$y' = v' + 1$ であるから，これを与えられた方程式に代入すると，微分方程式 $v' = v$ を得る．これは変数分離形の微分方程式で，一般解は $v = Ce^u$ となる．変数 $x, y$ に戻すと，初めの微分方程式の一般解 $y = Ce^x + x + 1$ が得られる．

**練習 164．** 微分方程式 $y' = y^2 + 2xy + x^2 - 1$ を変数分離形の方程式に変える変数変換を求めよ．

変数変換の公式 (7.13) は，次の 2 つの幾何学的な意味をもつ．

1．$x$, $y$ を平面上のある点のデカルト座標点とみなすと，$u$, $v$ は別の曲線座標系の同じ点の座標とみることができる．たとえば，公式

$$\begin{cases} u &= \sqrt{x^2+y^2} \\ v &= \arctan \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

または，同値な公式

$$\begin{cases} x &= u\cos v \\ y &= u\sin v \end{cases}$$

は極座標系 $(u, v)$ を導入する．

2．点 $(x, y)$ を点 $(u, v)$ $(u=\varphi(x,y),\ v=\psi(u,v))$ にうつす平面変換を扱うこととして考えられる．この場合，すべての座標は 1 つの同じ座標系で計算される．この変換を視覚的にわかりやすくするためには，2 つの座標軸 $x=$ 定数, $y=$ 定数 の像を描くといいだろう．

## §7.3　ベルヌーイ方程式

微分方程式に変数変換を応用した最初の歴史上の人物は，多分，ヨハン・ベルヌーイであろう．彼は，微分方程式

$$y' = Ay + By^n \tag{7.15}$$

を解いた (この方程式は現在彼の名前がつけられている)．ただし，$A$, $B$ は与えられている $x$ の関数である．彼は，この方程式をもっと簡単な次の線形方程式に帰着させようとした．

$$y' = Py + Q \tag{7.16}$$

ただし，$P$, $Q$ は $x$ の関数である．

まず，その線形方程式の解法の仕方を説明しよう．わからない関数 $y$ を $y=uv$ とおく．ただし，$u$, $v$ は，わかっていない $x$ の関数である．これを方程式 (7.16) に代入すると，次の式を得る．

$$u'v + uv' = Puv + Q$$

2 つの関係 $u'=Pu$, $v'=Q/u$ が成立するならば，この方程式はみたさ

れる．最初の方程式は，変数分離形の方程式である．よって，関数 $u(x)$ は，求められる．その $u(x)$ を二番目の式 $v' = Q/u$ に代入すると，簡単な積分法で $v(x)$ を求めることができる．このように，解 $y = u(x)v(x)$ を得るのである．

**練習 165.** 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$y' = 2\frac{y}{x} - x^3 + x$$

**問題 60** ベルヌーイ方程式 (7.15) を線形方程式 (7.16) に変える変換を求めよ．

**解答.** 方程式 (7.15)，(7.16) は従属変数 $y$ の指数の値だけが異なっている．よって，$y = v^k$ という形の変換を試すのが自然だろう (これは独立変数 $x$ を変えない)．(7.15) 式に，$y = v^k$ を代入すると

$$kv^{k-1}v' = Av^k + Bv^{kn},$$

または

$$v' = \frac{A}{k}v + \frac{B}{k}v^{kn-k+1}$$

となる．$k = 1/(1-n)$ とすると，指数 $kn-k+1$ は 0 になり，上記の方程式は線形方程式になる．よって，求める変換は $y = v^{1/(1-n)}$ であることがわかる．

**練習 166.** 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$y' = \frac{xy^2 + 1}{2y}$$

練習 160 が解けた (または，この本の終わりの答えをみた) 読者は，その解が初等関数で閉じた式として，従来の公式では得られないという事実に戸

惑うかもしれない．したがって，**求積法**について少し述べなければならない．関数

$$\int e^{-x^2/2}dx$$

は，初等関数 (多項式，三角関数，対数関数や，指数関数の組合せの関数) ではないけれども，実は，初等的な関数とほとんど同じくらい良いものである．この数値は任意の次数の精度で計算機で求められ，その性質は良く知られている (実際，この関数は確率論や統計学で広く用いられている)．同様なことが任意の初等関数の積分にもいえる．このことは，次の重要な概念の基礎となっている．

微分方程式は，その一般解が初等関数，不定積分，逆関数の式で書けるとき，**求積法で解ける**という．

求積法で解けない微分方程式の最も簡単な例は，次の方程式である (この事実は 1841 年，リウヴィル によって証明された)．

$$y' = y^2 + x$$

この微分方程式は，いわゆる**リッカティ方程式**

$$y' = a(y^2 + x^n) \tag{7.17}$$

の特別な場合である．

**練習 167.** リッカティ方程式 (7.17) の $n = 0$ のときの一般解を求めよ．

1742 年にダニエル・ベルヌーイとリッカティは，微分方程式 (7.17) が求積法で解ける媒介変数 $n$ の値の離散列を発見した．これは，大変みごとなトリックで証明された．実は，変換からなる巡回群を用いて証明された (あとで少し説明する)．このアイデアは，方程式 (7.17) を同じ形であるが異なる指数 $n$ をもつ方程式に変える変数変換をみつけ，$n = 0$ の場合 (このとき，練習 167 からわかるように，(7.16) 式は求積法で解ける) に帰着させることだった．次のこのことについて説明しよう．

まず，次のように従属変数を変えてみよう．

$$y = \frac{1}{x^2 v} - \frac{1}{ax}$$

この式を方程式 (7.17) に代入して整理すると，$v$ に関する次の方程式を

得る.

$$v' = a\left(-\frac{1}{x^2} - x^{n+2}v^2\right) \tag{7.18}$$

ただし,「′」は,以前と同様,$x$ に関する導関数を意味する.

これは,もはやリッカティ方程式ではないが,規則[2] $u = x^{n+3}$ (または,$x = u^{1/(n+3)}$) に従って独立変数 $x$ を変えると,リッカティ方程式になる.事実,連鎖律によって次のようになる.

$$v' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{du}\frac{du}{dx} = \frac{dv}{du}(n+3)x^{n+2} = (n+3)u^{\frac{n+2}{n+3}}\frac{dv}{du}$$

この変換後,簡単な計算で方程式 (7.18) は次の式になる.

$$\frac{dv}{du} = -\frac{a}{n+3}\left(v^2 + u^{-\frac{n+4}{n+3}}\right)$$

この式はリッカティ方程式であるが,指数 $n$ のところが $-(n+4)/(n+3)$ になったリッカティ方程式である.

たとえば,$n=-4$ である方程式ならば,この変換のあと,$n=0$ である方程式を得る ── それは,求積法で解ける微分方程式である.したがって,$n=-4$ であるリッカティ方程式もまた求積法で解けることがわかる.

**練習 168.** 微分方程式 $y' = y^2 + x^{-4}$ の一般解を求めよ.

**練習 169.** リッカティ方程式が求積法で解ける $n$ のもう 1 つの値を求めよ.

これらの結果を踏まえて,一般的な定理にしよう.我々はもうリッカティ方程式が指数 $m$ に対して求積法で解けるならば,それは $-(n+4)/(n+3) = m$ つまり $n = -(3m+4)/(m+1)$ となる指数 $n$ に対しても求積法で解けることは知っている.

このことを踏まえて次の一次分数関数を考えよう.

$$q(m) = -\frac{3m+4}{m+1}$$

前の議論によって,リッカティ方程式 (7.17) が指数 $m$ に対して求積法で

---

2 ベルヌーイとリッカティによって発見された変換を引用しただけである.彼らがどのようにしてそれらを発見したのかは誰も知るよしもない!

解けるならば，それは値 $q(m)$ に対しても解けることになる．その変換を繰り返すと，指数 $q(q(m))$, $q(q(q(m)))$ に対して，そして一般に $q^k(m)$ に対して求積法で解けることが推測できる．ただし，$q^k$ は変換 $q$ の $k$ 乗である．

**練習 170.**　$q^k(m)$ の式を求めよ．

逆変換 $q^{-1}$ にも，同じ性質があることに注意しよう．すなわち変換 $q^{-1}$ も「求積法で解ける指数」を「求積法で解ける指数」にうつす変換である．このように，一次分数変換 $q$ によって生成される無限巡回群が得られる．この無限巡回群は，実数全体の集合 (リッカティ方程式の指数) に作用する．求積法で解けるリッカティ方程式の性質は，この作用の不変量である．したがって，その作用による任意の軌道は，その微分方程式が求積法で解けるべき指数で完全に構成されているか，あるいはその微分方程式が求積法で解けないようなべき指数だけを含んでいるかのどちらかである．

とくに，数 0 の軌道は，求積法で解けるリッカティ方程式の無限列を与える．それらのべき指数は

$$q^k(0) = \frac{4k}{1-2k} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

である．$k \to \infty$ のとき，$q^k(0) \to -2$ となることに注意しよう．

**練習 171.**　リッカティ方程式 (7.17) は $n = -2$ に対しても求積法で解けることを証明せよ．

しかしながら「求積法で解ける」べき指数 $n = -2$ から始めると，$n = -2$ 以外の求積法で解けるべき指数はみつけられない．なぜなら，$-2$ は $q$ の不動点だから，軌道はただ 1 点で構成されるからである．

結局，リッカティべき指数の集合において，求積法で解ける 2 つの軌道をみつけた．リウヴィルは，この他の残されたすべての値に対して，リッカティ方程式が求積法で解けないことを証明した．

## §7.4　点変換

これまで，次の形の変数変換だけを扱ってきた．

$$\begin{cases} x = \varphi(u) \\ y = \psi(u, v) \end{cases} \tag{7.19}$$

つまり，独立変数 $x$ は新しい従属変数 $u$ だけで表されている．このとき，連鎖律 $dy/dx = dy/du \cdot du/dx$ により，導関数 $dy/dx$ を $u, v, du/dv$ の式で表すのは易しい．

しかし，任意の変換 $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$ を考えることができる (**点変換**という)．この場合の導関数 $dy/dx$ に対する変換公式を導くためには，**偏導関数**の概念が必要である．

**定義 43** $z = h(x, y)$ を 2 変数関数とする．このとき，$y$ の値が $y = y_0$ と固定されているならば，$z$ は 1 変数関数 $z = h(x, y_0)$ になる．この $z = h(x, y_0)$ の点 $x_0$ における導関数を関数 $h(x, y)$ の点 $(x_0, y_0)$ における $x$ に関する**偏微分係数**といい，$\frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0)$ と表す．数式では次のように定義される．

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{dh(x, y_0)}{dx}\Big|_{x=x_0} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{h(x_0 + \varepsilon, y_0) - h(x_0, y_0)}{\varepsilon}$$

**問題 61** 関数 $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ の点 $(2, 1)$ における $x$ に関する偏微分係数を求めよ．

**解答．** $z$ に $y = 1$ を代入すると，1 変数関数 $z = \sqrt{8 - x^2}$ になる．よって，$z_x = -x/\sqrt{8 - x^2}$．ゆえに

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2, 1) = -1$$

点 $(x_0, y_0)$ が変化すると，$\frac{\partial}{\partial x}(x_0, y_0)$ の値は変数 $x_0, y_0$ の関数になる．具体的な座標 $(x_0, y_0)$ の代わりに，記号 $(x, y)$ を用いると，この関数は変数 $x, y$ の関数となり，$\partial z/\partial x$，またはただ単に，$z_x$ と表される．これを $z$ の $x$ に関する**偏導関数**という．たとえば，関数 $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ の $x$ に関する偏導関数は，次のようになる．

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$$

偏導関数 $z_x$ を計算するためには，$z(x, y)$ を $x$ について微分しなければならない．このとき，変数 $y$ は任意の定数として扱われる．

$y$ に関する偏導関数も同様に定義される．同じように，$x$ を定数として扱う．したがって，関数 $x = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ の $y$ に関する偏導関数は，次のようになる．

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$$

さて，偏導関数の幾何学的意味を説明しよう．点 $(x, y, z(x, y))$ 全体で構成される 3 次元空間内の曲面 —— 2 変数関数 $z(x, y)$ のグラフを考える．図 7.4 は関数 $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ のグラフである．

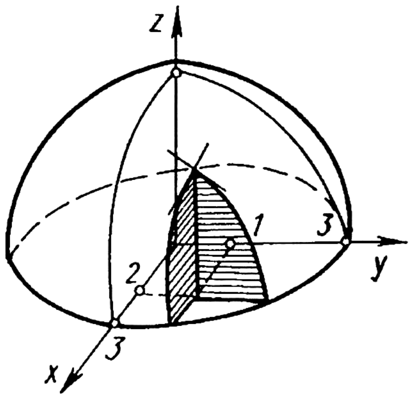



図 7.4 偏微分

$M$ を関数 $z(x, y)$ の曲面，$(x_0, y_0)$ を関数 $z(x, y)$ の定義域内の点とする．このとき，平面 $y = y_0$ を描いてみよう．平面 $y = y_0$ は，$y = y_0$ 上のある平面曲線に沿って曲面 $M$ を切っている．この曲線の点 $(x_0, y_0)$ における接線の傾きが $z_x(x_0, y_0)$ である．

同様に，$z_y(x_0, y_0)$ は，平面 $x = x_0$ による曲面 $M$ の切り口における接線の傾きである．図 7.4 は，関数 $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ の点 $(2, 1)$ における両方の切り口と接線を示している．

その 2 接線を通る平面は，その関数のグラフの与えられた点における接平面となり，その方程式は

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0), \tag{7.20}$$

となる．ただし，$z_0 = h(x_0, y_0)$; $p = \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0)$, $q = \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0)$ である．事実，$x = x_0$ を (7.20) に代入すると，$y$ の関数とみられる $h(x_0, y)$ のグラフの接線の方程式を得る．また，$y = y_0$ を代入すると，$h(x, y_0)$ に対する同様の方程式を得る．

点 $(x, y)$ は，$(x_0, y_0)$ に十分近いところにあるならば，$M$ 上の点 $(x, y, h(x, y))$ と接平面 (7.20) 上の点 $(x, y, p(x - x_0) + q(y - y_0) + z_0)$ は，互いに大変接近していることになる．したがって，独立変数 $(x, y)$ が $(x_0, y_0)$ のまわりを動くとき，この動き (シフト) が非常に小さいならば，(7.20) 式によって計算できる差 $z - z_0$ は，$h(x, y)$ の増分とみなすことができる．このとき，3 変数 $x$, $y$, $z$ の無限小の増分をそれぞれ $dx$, $dy$, $dz$ と表すと，次のように書くことができる (**2 変数関数の全微分の公式**)．

$$dz = z_x dx + z_y dy \tag{7.21}$$

さて，変数 $x$, $y$ をそれぞれ，次の任意の点変換の像

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases} \tag{7.22}$$

とするとき，$dy/dx$ を $u$, $v$ で表してみよう．$y' = dy/dx$, $v' = dv/du$(この「$'$」は，それぞれ異なる意味をもつことに注意!) とすると，(7.21) より $dy/dx$ は次のように表される．

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y_u du + y_v dv}{x_u du + x_v dv} = \frac{y_u + y_v \frac{dv}{du}}{x_u + x_v \frac{dv}{du}} = \frac{y_u + y_v v'}{x_u + x_v v'} \tag{7.23}$$

したがって，導関数 $y'$ は $u$ と $v$ に依存する係数をもつ $v'$ の一次分数関数，すなわち $v'$ の射影変換として表されることがわかる (§6.2 参照)．ところで，この注目すべき事実は，射影幾何学と常微分方程式の間の深い関係を導く．しかし，本書ではそのことについて議論しない．

以前注意したように，(7.22) 式は平面上のある座標系から別の座標系への変換，あるいは $(u, v) \mapsto (x, y)$ による平面からそれ自身への写像とみなされる．後者の場合において，(7.23) 式は平面曲線の傾きがこの写像でうつすことによってどのように変化するかを表している (図 7.5 参照)．すなわち $v'$ は与えられた曲線に対する水平線からの角の正接で，一方，$y'$ はこの曲線の像に対する同様の角の正接である．

方向 (直線) が付随した平面上の点を**接触元**という．接触元は，3 つの数

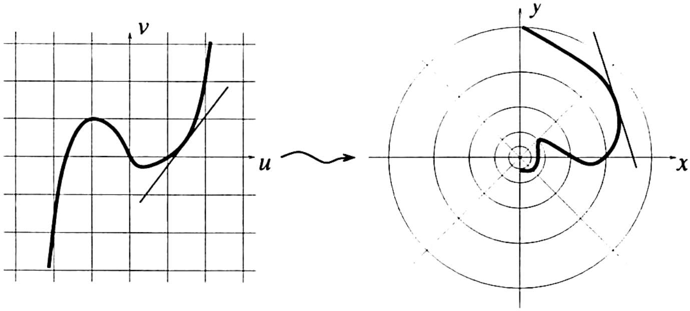



図 7.5　点変換

$(x, y, p)$ によって表される．ただし，$(x, y)$ は平面上の与えられた点の座標で，$p$ はその直線の傾き (その直線と水平軸となす角の正接) である．このように，すべての接触元の集合は，3 次元空間を形成する．これを**接触空間**という．その要素のいくつかは，図 7.6 に示されている．

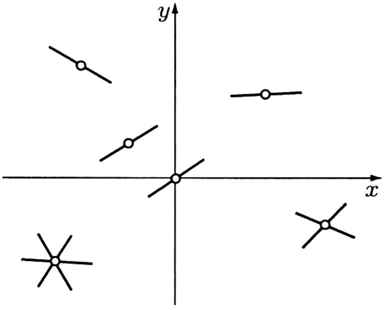



図 7.6　接触元

(7.23) 式は (7.22) 式とあわせて，接触空間のある変換を定義している．また，それは (7.22) 式だけで与えられる平面変換に対応する微分の変換式である．

**問題 62** 円 $x^2 + y^2 = 1$ に関する反転に対応する接触空間の変換を求めよ．

**解答．** その反転を施すと，$(x, y)$ は次の $(u, v)$ にうつる：

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{x}{x^2+y^2} \\
v &= \frac{y}{x^2+y^2}
\end{aligned}
$$

これらの関数の導関数は

$$
\begin{aligned}
u_x &= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad u_y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\
v_x &= \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad v_y = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}
$$

であるから，これを (7.23) 式に代入すると次のようになる．

$$
v' = \frac{v_x + v_y y'}{u_x + u_y y'} = \frac{(x^2-y^2)y' - 2xy}{-2xyy' + y^2 - x^2} \tag{7.24}
$$

この結果の系として，次のような定理を証明することができる．これは，練習 153(p.174) の主張の一般化である．

**定理 18** 平面の反転変換は曲線どうしのなす角を保存する．

**証明** 2 曲線のなす角は，定義よりその曲線の接線どうしのなす角である．$(x, y)$–平面上の 2 曲線の傾き角の正接が $p_1$ と $p_2$ であるとき，その曲線どうしのなす角 $\alpha$ は

$$
\tan\alpha = \frac{p_1 - p_2}{1 + p_1 p_2}
$$

となる．

$q_1, q_2$ をその 2 曲線の反転による像の正接，$\beta$ をそれらのなす角とすると，次の式が成り立つ．

$$
\tan\beta = \frac{q_1 - q_2}{1 + q_1 q_2} \tag{7.25}
$$

(7.24) より

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \frac{ap_1 + b}{bp_1 - a} \\
q_2 &= \frac{ap_2 + b}{bp_2 - a}
\end{aligned}
$$

となる．ただし $v_y=-u_x$ を $a$，$v_x=u_y$ を $b$ とおいたこの式を方程式 (7.25) に代入すると

$$\tan\beta=\frac{\dfrac{ap_1+b}{bp_1-a}-\dfrac{ap_2+b}{bp_2-a}}{1+\dfrac{ap_1+b}{bp_1-a}\dfrac{ap_2+b}{bp_2-a}}=-\frac{p_1-p_2}{1+p_1p_2}=-\tan\alpha$$

となる．この等式は，反転によって角は保存されるが，平面の方向は変わることを意味している． □

ここで点変換を用いて微分方程式をうまく解く例をあげよう．

**問題 63** 次の微分方程式を解け．

$$y'=\frac{(y^2-x^2)\left(x^2+(x^2+y^2)^2\right)+2\,xy\left(y^2+(x^2+y^2)^2\right)}{2\,xy\left(x^2+(x^2+y^2)^2\right)+(x^2-y^2)\left(y^2+(x^2+y^2)^2\right)}$$

**解答．** 次の変数変換を行う．

$$\begin{aligned}x&=\frac{u}{u^2+v^2}\\ y&=\frac{v}{u^2+v^2}\\ y'&=\frac{(u^2-v^2)v'-2uv}{-2uvv'+v^2-u^2}\end{aligned}$$

上の式を与えられた方程式に代入し，整理すると次のようになる．

$$v'=\frac{u^2+1}{v^2-1}$$

したがって，これらの変数を分離すると，$(v^2-1)dv=(u^2+1)du$ となるから，それを解くと一般解は次のようになる．

$$\frac{v^3}{3}=\frac{u^3}{3}+C$$

変数を $(x,y)$ に戻すと，

$$y^3-x^3=3(x+y)(x^2+y^2)^2+C(x^2+y^2)^3$$

となる．$C$ は任意の定数である．

**練習 172.** (a)$(x,y)$ をデカルト座標，$(r,\varphi)$ をその平面上の極座標とする．このとき，$dr/d\varphi$ を $dy/dx$ を用いて求めよ．(b)(a) の結果を使って，微分方程式 $yy'+x=(x^2+y^2)(xy'-y)$ を解け．

## §7.5　1パラメーター群

**定義 44** 平面変換の1パラメーター群とは，平面上への加群 $\mathbb{R}$ のある作用である．

これは任意の実数 $t$ に対して，ある変換 $g_t$ が次のように定義されていることと同値である．**任意の組 $s,t\in\mathbb{R}$ に対して，方程式 $g_t\circ g_s=g_{t+s}$ が成り立つ．言い換えると，群 $\mathbb{R}$ から平面変換群への準同型を扱うのと同じである．** このとき，$\{g_t\}$ を平面上の**変換の1パラメーター群**という．1パラメーター群は，単なる集合 $\{g_t\}$ ではなく，パラメーター表示 $t\mapsto g_t$ をもつ集合であることを力説したい．

自明でない1パラメーター群の一番簡単な例は，平行移動の群である．たとえば，$Ox$ 軸方向の平行移動では，$g_t$ はベクトル $t\mathbf{e}_1$ の移動である．ただし，$\mathbf{e}_1$ は水平方向の単位ベクトルである．

**練習 173.** 1パラメーター群に属している任意の2つの変換は，可換であることを証明せよ．

1パラメーター群は3変数関数の組として座標で表される．

$$\begin{cases} x_t = \varphi(x,y,t) \\ y_t = \psi(x,y,t) \end{cases} \tag{7.26}$$

ここで，$(x,y)$ は平面上の任意の点の座標で，$(x_t,y_t)$ は変換 $g_t$ によるその像の座標である．$t$ の値が固定されると，具体的な変換を定義する2変数関数の組を得る．

群の法則，すなわち関係式 $g_t\circ g_s=g_{s+t}$ は，次のように関数 $\varphi,\psi$ によって表される．

$$\begin{cases} \varphi(\varphi(x,y,s),\psi(x,y,s),t) = \varphi(x,y,s+t) \\ \psi(\varphi(x,y,s),\psi(x,y,s),t) = \psi(x,y,s+t) \end{cases} \tag{7.27}$$

この式は，座標で表された1パラメーター群の定義である．

たとえば，水平方向の移動で構成される群は次の関数によって表示できる．

$$\begin{cases} x_t &= x+t \\ y_t &= y \end{cases}$$

この式は関係式 (7.27) を明らかにみたしている．

**練習 174.** ある点を中心とする正係数の相似拡大変換全体の集合は，1パラメーター群であるか．

用心深い読者は，練習 174 の問題が正しくだされていないことに気がつくだろう．なぜなら，1パラメーター群は与えられた変換の集合上に，あらかじめ固定されたパラメーター表示があることを仮定しているからである．もし，任意の数 $t \in \mathbb{R}$ に，引き伸ばし係数 $t$ の相似変換を割り当てるなら，1パラメーター群は得られないだろう．なぜならば，係数 $s$ と $t$ の相似変換の合成は，係数 $s+t$ の相似変形ではなく，係数 $st$ の相似変形であるからである．幸いにも，和を積に変えるトリックを知っている．すなわち，指数関数を用いる．数 $t$ に，係数 $e^t$ の相似変形を割り当てると，まぎれもなく，1パラメーター群を得る．原点に相似変形の中心をおくと，次のような関数によって，群を記述することができる．

$$\begin{cases} x_t &= e^t x \\ y_t &= e^t y \end{cases}$$

関係式 (7.27) は明らかに成り立つ．

1パラメーター群は，その軌道の集合によって視覚的にとらえることができる．図 7.7 は，すでに述べたことのある2つの群–移動と相似変換–の軌道を表している．

気をつけなければならないことは，軌道の集合は，1パラメーター群を一意的には定義しないことである．たとえば2倍の速さの移動

$$\begin{cases} x_t &= x+2t \\ y_t &= y \end{cases}$$

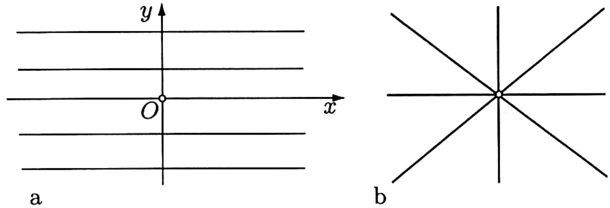



図 7.7　移動と相似変換の 1 パラメータ群の軌道

の群を考える．この群の軌道は，以前議論した (図 7.7a で示される) 移動の群の軌道と同じである．

**練習 175.**　1 点を中心とする回転の 1 パラメーター群を定義せよ．また，その座標を表示し，軌道を描け．

**練習 176.**　次の関係式は，1 パラメーター群を定義することを確かめよ．

$$\begin{cases} x_t = e^{at}(x\cos bt - y\sin bt) \\ y_t = e^{at}(x\sin bt + y\cos bt) \end{cases}$$

また，この式の幾何学的な意味を述べ，軌道を描け．

**練習 177.**　$x_t$，$y_t$ を次の関数 $w$ の 2 次方程式の根とせよ．

$$(w-x)(w-y)+t=0$$

ただし，$x_t, y_t$ は，$x, y, t$ の 3 変数の関数とする．このとき，関数 $x_t, y_t$ は変換の 1 パラメーター群を定義することを証明せよ．また，その軌道を描け．

## §7.6　微分方程式の対称

微分方程式は，平面上の方向場としてみられるが，対称をもつことがある．図 7.1b をみてみると，この方向場は，$Oy$ に沿った任意の平行移動で変化しないことがわかる．また，$Ox$ に沿って全体を $2\pi$ 倍する平行移動でも変化しない．前者の種類の変換は，1 パラメーター群 $x_t = x, y_t = y + t$ を形成する．後者の種類の変換は，離散巡回群を形成する (§7.1 参照)．

微分方程式の対称からなる 1 パラメーター群がわかれば，求積法によって

その微分方程式の一般解を求めることができる．

完全な定義をするため，微分方程式

$$y' = f(x, y) \tag{7.28}$$

と平面変換

$$\begin{cases} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \end{cases} \tag{7.29}$$

が与えられているとする．(7.23) より，$y' = dy/dx$ を $u$, $v$, $v' = dv/du$ を用いて表すことができる．

**定義 45** この代入のあと，変数 $u$, $v$, $v'$ に対する同じ方程式

$$v' = f(u, v)$$

を得るなら，変数変換 (7.29) を，与えられた微分方程式 (7.28) の**対称**という．

幾何学的には，これは，(7.22)〜(7.23) によって与えられた接触空間の変換が，与えられた方向場に属するすべての接触元のなす曲面を保存することを意味する．

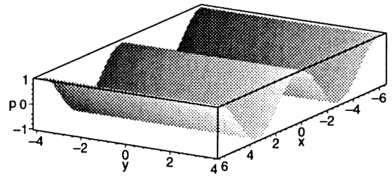



図 7.8 3 次元空間のなかの曲面としての微分方程式

図 7.8 は，微分方程式 $y' = \cos x$ に対するこのような曲面を示している．2 つの変換

$$\begin{cases} x_t &= x \\ y_t &= y + t \\ p_t &= p \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_t &= x + 2\pi k \\ y_t &= y \\ p_t &= p \end{cases} \qquad \text{（ただしkは整数）}$$

は，この曲面をこの曲面にうつすことがわかる．

微分方程式と1パラメーター群の相関関係について，2つの主な問題がある：

1. 微分方程式が与えられているとする．このとき，その対称で構成される群をすべて(または，いくつか)求めよ．
2. 平面変換で構成される1パラメーター群が与えられているとする．このとき，この群によって保存される，すなわちその群がその微分方程式の対称からなるような微分方程式のすべて(または，いくつか)を求めよ．

(微分方程式を解く)練習のためには，前者の問題は後者の問題より重要である．しかし，前者に答えるのは非常に難しい．したがって，まず後者の問題から考えよう．

2つの簡単な例から始める．答えは明らかである：

- $x$ 軸に沿って平行移動する群によって保存される一般的な方程式は次である((7.5)式参照).
$$y' = f(y) \tag{7.30}$$
- $y$ 軸に沿って平行移動する群によって保存される一般的な方程式は，次である((7.4)式参照).
$$y' = f(x)$$

もっと面白い群の例をみてみよう．

**問題 64** $(0,0)$ を中心とする($(x,y)$ 平面の)の回転群によって変化しない微分方程式の一般形を求めよ．

**解答.** 角 $\alpha$ の回転で，任意の接触元は付属した点とともに動き，同じ角 $\alpha$ で回転する(図 7.9).

よって，接触元と点 $(x,y)$ の半径ベクトルがなす角は，変化しない．このように，方向場(=微分方程式)が回転の群のもとで変わらないための必要十分条件は，場の方向と半径ベクトルとのなす角が，原点からの距離だけに依存することである．角の代わりに，角の正接をとり，距離の代わりに，距離の二乗をとることができる．2つの

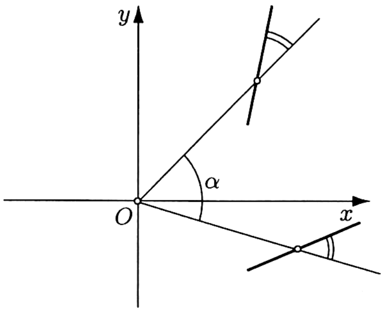



図 7.9 方向場の回転の作用

角の差の正接に対する公式を用いると，次の公式を得る．これは，原点を中心とする回転群の微分方程式によって変化しない．

$$\frac{xy' - y}{yy' + x} = f(x^2 + y^2)$$

$y'$ に関してこれを解くと，次の答えを得る．

$$y' = \frac{xf(x^2 + y^2) + y}{x - yf(x^2 + y^2)} \tag{7.31}$$

**練習 178.** 相似変換の 1 パラメーター群を与える微分方程式をすべて求めよ．

**練習 179.** 練習 176 で述べられた螺旋相似変換の 1 パラメーター群を与える微分方程式をすべて求めよ．

## §7.7 対称による方程式の解法

この節では次の事実を証明する．

『ある微分方程式の対称で構成される 1 パラメーター群がわかっているとき，その微分方程式は変数変換によって変数分離形の微分方程式に変えることができる ── よって，その一般解は求積法で求められる．』

変数が分離する新しい座標系をみつけるために，1パラメーター群の不変量を用いる．そこでまずその不変量のいくつかの性質を述べたあと，いくつかの例を考えよう．

群の作用の不変量は，軌道上で定数関数であることを思いだそう (§5.6 参照)．言い換えると，ある関数が不変量であるとは，その関数がその群の変換によってうつり合う任意の2点で同じ値をとることである．簡単な例をあげよう．$y$ の任意の関数は $Ox$ に沿っての移動で構成される1パラメータ群の不変量である．関数 $y$ はそれ自身この群の作用に対する完全不変量である．なぜならば，その軌道によって値がすべて異なるからである．

同様に，関数 $x$ は軸 $Oy$ 方向の移動で構成される群の完全不変量である．

中心 $O$ の相似変換で，原点以外の平面に作用する群の完全不変量は何か？それは，偏角 $\varphi$ であると考えたいかもしれない．実際，偏角 $\varphi$ は原点から発する任意の光線 (半直線) のすべての点において，同じ値をとり，異なる光線はその関数の異なる値に対応している．しかし，$\varphi$ は点のふつうの1-価関数ではない．たとえば，点 $(-1,0)$ には，同じ結果をもつ値 $180°$, $-180°$(そして，無限個の他の値) を割り当てることができる．もちろん $\varphi$ を1-価関数にすることはできる．たとえば，$0° \leq \varphi < 360°$ と約束すればよい —— しかし，このとき，$\varphi$ は不連続関数になる．事実，相似変換の群に対しては，どのような実数値連続関数も完全不変量とならない．しかし，定義領域を制限すると，連続な不変量が多く存在する．たとえば，領域 $x \neq 0$ で定義される関数 $y/x$ は，相似変換群に対する連続な不変量である．

**練習 180.** 原点の回りの回転で構成される群の不変量を求めよ．また，この群に対して，連続実数値関数の完全不変量は存在するか．

1パラメーター群の不変量を求める2つの方法がある：

1. **形式的な求め方** 1パラメーター群が (7.26) の関数の組として座標で与えられているとすると，その不変量は $\varphi(x,y,t)$ と $\psi(x,y,t)$ で組み合わされて，変数 $t$ を含まない関数となる．すなわち $t$ に依存しない関数 $h(\varphi,\psi)$ である．

2. **幾何学的な求め方** 1パラメーター群の任意の軌道と平面上のちょうど1点で交わる曲線 $K$ を描く (図 7.10 参照)．この曲線上の異なる点で

異なる値をとる関数をえらび，その関数を次のルールで平面すべてに拡張する．その関数の任意の点 $A$ の値は $A$ の軌道が曲線 $K$ と交わる点 $B$ での値に等しくなるように定める．

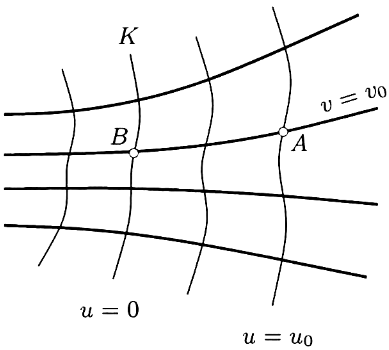



図 7.10　1 パラメータ群の不変量

**問題 65** 次の 1 パラメーター群の不変量を求めよ．

$$\begin{cases} x_t &= x + t \\ y_t &= e^t y \end{cases}$$

**解答．形式的なな方法．** しばらく上の式を眺めると，組み合わされた式 $e^t y \cdot e^{-(x+t)} = ye^{-x}$ は $t$ に依存しないことがわかる．したがって，式 $ye^{-x}$ はその群のある不変量である．

**幾何学的方法．** 群の軌道は図 7.11 に示されている．座標軸 $Oy$ は任意の軌道と 1 点で交わっている．そこで $Oy$ を曲線 $K$ としてえらぶことができる．関数 $v(0, y) = y$ は $Oy$ の異なる点で異なる値をとるから，群の軌道に沿って関数 $v(0, y) = y$ を平面全体に拡張することを考える．

$A(x, y)$ を平面上の任意の点とし，$B(0, v)$ を $y$-軸と対応する軌道との交点とする．このとき，群の方程式から，$x = t$, $y = e^t v$ となる数 $t$ が存在することがわかる．したがって，$v = ye^{-x}$．よって，不変量は $ye^{-x}$ である．

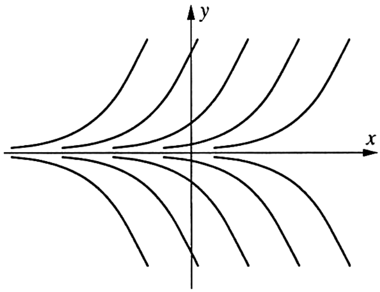



図 7.11　問題 65 の群の軌道

**練習 181.** 螺旋相似変換 (練習 176) で構成される群の自明でない不変量を上記の 2 つの方法で求めよ.

最後に，対称の変換群がわかっている微分方程式をを解いてみよう．最初の方針は，新しい座標にうつし，その座標での変数の 1 つがその群の不変量であるようにすることである．このような変換のあと，微分方程式の変数は分離することがしばしばあるからである (かといって，いつも分離するとは限らない)．このとき，その変数分離形の方程式は求積法で求まる．よく使われる例を考えよう．

**問題 66** 次の形の微分方程式の一般解を求めよ．

$$y' = f(y/x) \tag{7.32}$$

**解答.** このような方程式を**同次形**という．練習 178 からわかるように，同次形の方程式は，中心 $(0, 0)$ の相似変換の 1 パラメーター群に関する不変量となる．関数 $y/x$ は，この群の不変量であるので新しい従属変数として $y/x$ をとり，独立変数 $x$ はそのままにしておく．このように，$v = y/x$ または $y = xv$ とおくと，$y' = v + xv'$ となり，これを (7.32) に代入すると，次を得る．

$$v' = \frac{f(v) - v}{x}$$

これは変数分離形の微分方程式である．

**練習 182.** 問題 64 の議論を続けて，微分方程式 $y' = 1 + 2y/x$ の一般解を求めよ．

**練習 183.** 微分方程式 (7.32) は変数を極座標で表すと変数分離形の微分方程式となるか．

**練習 184.** 問題 66 の議論を次の形の方程式に適用せよ．

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$$

強調しなければならないことは，新しい従属変数として群の不変量をとったとしても，その微分方程式は変数分離形になるとは限らないことである．独立変数のえらび方もまた重要である．たとえば，回転の群を与える微分方程式 (7.31) を極座標で表すと，新しい方程式は，変数分離形 $u\,dv/du = f(v)$ になる．しかし，変数変換 $u = x$, $v = x^2 + y^2$($u$ は，群の不変量である) によっては，変数分離形にはならない (確かめてみよう)．

対称からなる 1 パラメーター群から微分方程式を解く万能の法則を得るため，座標系 $(u, v)$ で，その群ができるだけ単純な，たとえば，軸 $u$ に沿った平行移動からなるようなものをみつけよう．この群を与える微分方程式の一般形は，すでにみたように，$dv/du = \varphi(v)$ である．ここで，この変数は分離しているから，その方程式は求積法で解ける．さて，その初めの 1 パラメーター群をどのような座標変換によって変形し，この単純な形にできるのかを理解しよう．

座標 $(u, v)$ において，その群の変換は $u_t = u + t$, $v_t = v$ という形であってほしい．これらの変換は，その座標直線 $u = 0$ を平行な直線 $u = t$ にうつす．その群の不変量である実数値関数 $v(x, y)$ をえらぼう．その軌道は，方程式 $v =$ 定数 で与えられる．1 点だけで任意の軌道と交わる曲線 $K$ をえらび，$K$ を新しい座標系の $v$-軸と仮定する．すなわち，それは方程式 $u = 0$ で表わされるものである．このとき，平面を埋め尽くすために群変換 $g_t$ による $K$ の像は方程式 $u = t$ で表わされるべきであると仮定しなければならない．

関数 $u$ の代わりに，独立変数として $u$ と，同じレベル直線族 $w =$ 定数 をもつ別の関数 $w$ をとるならば (直線 $w = t$ は $G$ のある変換によって，$w = 0$ の像となるべきである)，その新しい座標系で変数が分離する方程式を得るだ

ろう．事実このとき，$w$ は $u$ の関数 $w = h(u)$ である．したがって，方程式 $dv/du = \varphi(v)$ に代入すると，変数分離形の微分方程式 $dv/dw = \varphi(v)\psi(w)$ を得る．

結果として，次の**変数分離定理**を述べることができる．

**定理 19** (変数分離定理) 微分方程式 $E$ の対称で構成される 1 パラメーター群 $G = \{g_t\}$ がわかっているとする．このとき，方程式 $E$ は，次をみたす任意の座標系 $(u, v)$ で変数分離形の微分方程式となる．座標直線 $v =$ 定数 はそれぞれ $G$ の軌道であり，座標直線 $u =$ 定数 は変換 $g_t$ で互いにうつり合う．

**問題 67** 次の微分方程式を解け．

$$y' = \frac{2}{5}(y^2 + x^{-2})$$

**解答．** $x$ に定数 $k$, $y$ にその逆数 $k^{-1}$ をかけるならば，$y'$ は $k^{-2}$ がかけられる ((7.23) 式によっても確認することができる)．与えられた方程式のすべての項が同じ値の定数がかけられるから，その方程式は実際には変化しない．このことは，群

$$\begin{cases} x_t &= e^{-t}x \\ y_t &= e^t y \end{cases}$$

が与式の対称群であることを意味する．

この群は**双曲的な回転**の群とよばれる．その軌道は，双曲線 $xy =$ 定数(図 7.12 参照) の枝 (連結成分) である．したがって積 $xy$ はこの群の不変量である．この不変量を新しい従属変数 $v$ とみなす．

ここで，鉛直線 $x =$ 定数 は双曲的な回転で互いにうつり合うことに注意しよう．直線 $x = a$ の像は直線 $x = e^{-t}a$ である．したがって，$x$ を新しい座標 $u$ とおくことができる．このように，求める変数変換は

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= \frac{v}{u} \end{aligned}$$

である．この変数変換のあと，与式は次のようになる．

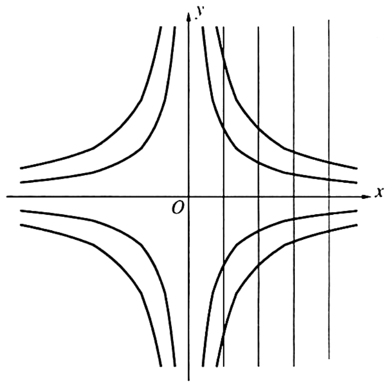



図 7.12 双曲的な回転の軌道

$$v' = \frac{2v^2 + 5v + 2}{5u}$$

この変数は分離しているから，求積法で解くと，一般解は

$$\frac{v + \frac{1}{2}}{v + 2} = Cu^{3/5}$$

となる．$u, v$ を $x, y$ を用いて表すと，次の答えを得る．

$$y = \frac{3}{2(x - Cx^{8/5})} - \frac{2}{x}$$

**備考：** 同じやり方で，任意の値 $a$ に対する微分方程式 $y' = a(y^2 + x^{-2})$ を解くことができる．問題のように特別なケースだけを考えたのは，一般的な答えがかなり扱いにくいからである．

**練習 185.** 微分方程式 $y' = (x + y^2)/(xy)$ の一般解を求めよ．

最後の例として，変数変換 $x = \varphi(u)$, $y = \psi(u, v)$ によって変数が分離されない方程式を考えよう．

**問題 68** 微分方程式

$$y' = \frac{(y^2 - x^2)^2 - 5(y - x) + 4}{(y^2 - x^2)^2 + 5(y - x) + 4}$$

を，次の 1 パラメーター群を用いて解け．

$$\begin{cases} x_t &= \frac{e^t+e^{-t}}{2}x + \frac{e^t-e^{-t}}{2}y \\ y_t &= \frac{e^t-e^{-t}}{2}x + \frac{e^t+e^{-t}}{2}y \end{cases}$$

**解答.** これらの変換は，双曲的な回転であるが，最初の座標系に関して 45° 回転した座標系で考えられる．関数 $v = y^2 - x^2$ はその群の不変量である．垂線，または水平線の集合族はその群の変換で保存されないことに注意しよう．したがって，$u = x$ または，$u = y$ とするのはよくない．しかし，直線 $y - x =$ 定数 はこの性質をもっている．$u = y - x$ とおくと，方程式は次のようになる．

$$\frac{dv}{du} = \frac{5v - v^2 - 4}{u}$$

これは変数分離形である!! この方程式を解いて，もとの変数に戻すと次の解が得られる．

$$\frac{y^2 - x^2 - 1}{y^2 - x^2 - 4} = C(y-x)^3$$

**練習 186.** 微分方程式 $y' = e^{-x}y^2 - y + e^x$ を対称群 $x_t = x + t$, $y_t = e^t y$ を用いて解け．

このようにして，ある微分方程式の対称で構成される 1 パラメーター群がわかっているとき，どのようにして，その微分方程式を解けばいいのかを学んだ.「これは，しかしながら，任意の微分方程式 $Xdy - Ydx = 0$ が，求積法で解けることを意味するのではない．難しいのは，その微分方程式を変えない 1 パラメーター群をみつけることである.」 これは，ソフス・リーの言葉である．彼は，連続群の理論を創り，微分方程式に応用したノルウェーの数学者である．先に述べられたものは，その一番簡単な場合である．

現在まで，およそ 30 年間，微分方程式の対称性を発見するアルゴリズムが苦心して作られ，微分方程式を非数値的に，すなわち記号的に解くためのソフトウェアに応用されている．

# 付録A
# 練習問題の解答及びヒント

1. 存在する．たとえば，頂点が $(0,0)$, $(12,9)$, $(24,-7)$ の三角形．
2. 直接構成するかあるいは練習 6 の結果を用いるとよい．答え：可能性として多角形 $\Phi$ は 3 あるいは 4 あるいは 5 あるいは 6 個の頂点をもつ．
3. 必要十分条件は $k-l=1$ である．これを示すには，与式を $A_1+A_2-B_1+A_3-B_2+\cdots$ と書きかえるとよい．
4. 問題 2 より，この主張はオイラーの定理: $\overrightarrow{MH}=2\overrightarrow{OM}$ と同値であることがわかる．ここで，$M$, $O$, $H$ はそれぞれその三角形の重心，外心，垂心である．このオイラーの定理を証明するには，3 辺が $ABC$ の 3 辺と平行で，$ABC$ の 2 倍の大きさの三角形 $A_1B_1C_1$ を構成すればよい (図 A.1 参照)．そして三角形 $ABC$ の垂直二等分線はすべて三角形 $A_1B_1C_1$ の中線のどれかと一致することに注意せよ．

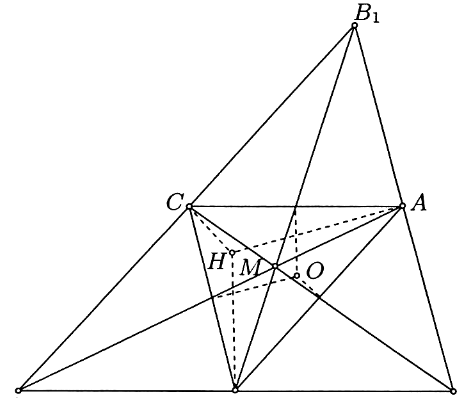



図 A.1　オイラーの定理

5. 必要十分条件は $\alpha+\beta+\cdots+\omega=1$ である．これはベクトルの等式：$\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}+\cdots+\omega\overrightarrow{PZ}=\alpha\overrightarrow{QA}+\beta\overrightarrow{QB}+\cdots+\omega\overrightarrow{QZ}+(\alpha+\beta+\cdots+\omega)\overrightarrow{PQ}$ より導かれる．
6. $\{a_1A_1+a_2A_2+\cdots+a_nA_n|a_i\geq 0, a_1+a_2+\cdots+a_n=1\}$.
7. 問題のすべての点をその四辺形の 4 頂点によって表せ．
8. これらの点を六角形の頂点によって表せ．
9. 問題のすべての点をその四辺形の 4 頂点によって表せ．
10. 2 本の中線の交点を極とし，問題 2 の結果を用いよ．
11. 答え：対角線は 1:6 に分けられる．ヒント: その平行四辺形の 1 つの頂点を極，他の 2 頂点を基底点にとり，与えられた直線と対角線の交点を異なる 2 つの方法で表せ．
12. (a) $y=b$. (b) $x=a$. (c) $ay=bx$.
13. 3 本の中線の和集合．
14. $K$ を極，$A$, $B$ を基底点とする．3 点 $D$, $E$, $F$ の座標を点 $C$ の座標 $(a,b)$ を用いて表せ．
15. 練習 14 の解答を参照せよ．
16. (a)(b) とも閉じていない．
17. 点 $K(0,1)$ を基底点 $(E,A)$ によって展開し (定義 3 参照)，$K^2=-E$ を示せ．よって，この積は複素数の積と一致する (p. 26 参照)．複素数の三角法を用いると，次の答えとなる:

| | $E$ | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $E$ | $E$ | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |
| $A$ | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ |
| $B$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $A$ |
| $C$ | $C$ | $D$ | $E$ | $A$ | $B$ |
| $D$ | $D$ | $E$ | $A$ | $B$ | $C$ |

18. (a) 0. (b) $\pm(1-2i)$ (c) 1 (与えられた数の 3 乗は $-1$ である)．
19. (a) 点 3 を中心とする半径 5 の円周．(b) 線分 $[-4,2i]$ の垂直二等分線．(c) 円周 (等式 $|p|^2+|q|^2=(|p+q|^2+|p-q|^2)/2$ を用いよ．$p$, $q$ は複素数)．
20. 不等式の左辺は，複素平面上の 2 点 0, $5+5i$ を結ぶ折れ線の長さに等しい．これを示すには，複素数 $x_1+(1-x_2)i$, $(1-x_3)+x_2i$, ..., $x_9+(1-x_{10})i$, $(1-x_1)+x_{10}i$ の和が $5+5i$ であることをみよ．
21. $0°$, $90°$, $180°$, $270°$, $45°$, $330°$.
22. (a) 図 A.2 参照．
(b) たとえば，$(r-2)(r-2-|\sin 3\phi|)=0$，デカルト座標では，

$$(\sqrt{x^2+y^2}-2)(\sqrt{x^2+y^2}-2-\frac{|3x^2y-y^3|}{(x^2+y^2)^{3/2}})=0.$$

23. 等式 $z=\cos\alpha\pm i\sin\alpha$ を証明せよ．
24. $2n$．証明：問題 9 と同様．

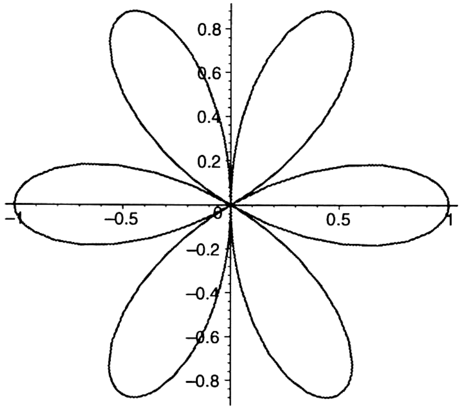



図 A.2　練習 22(a) の曲線

25. $z$ が多角形の外側にあるとする．多角形が凸であるため，すべての点 $z - c_i$ の偏角は 180° の幅におさまる．したがって，すべての点 $1/(z - c_i)$ の偏角も同じ幅におさまるから，これらの和は 0 にはならない．
26. 2 つの平行移動を用いよ．
27. 次のような作図の仕方がある．与えられたベクトルの端点を通り，与えられた三角形の辺と平行な直線を描くことにより，その与えられたベクトルに三角形を内接させる．そして内接した三角形ごともとの三角形に平行移動させる．
28. 問題の台形を $AB \parallel CD$ の台形 $ABCD$ とする．点 $B$ をベクトル $\overrightarrow{DC}$ によって平行移動させた点を $B'$ として，三角形 $ACB'$ を考えよ．
29. $XO$ と $YO$ に関する対称変換を用いよ．
30. 二等分線に関して三角形の頂点に対称な点は，その三角形の対辺 (あるいはその延長線) 上にある．
31. この現象は $180°/n$ の角に起こる．ただし，$n$ は整数である．
32. 90° 回転した後，ベクトル $\overrightarrow{MA_i}$ は与えられた多角形の連続する辺となる．
33. 60° 回転を用いよ．
34. 点 $A$ を点 $B$ にうつす変換で，正方形 $ABCD$ の中心の回りの回転を考える．この回転によって点 $M$ がうつる点を $K$ とする．このとき，$AK \perp BM$, $BK \perp CM$, $CK \perp DM$, $DK \perp AM$ を示せ．
35. 円周どうしの交点に関する点対称を用いよ．
36. 先手のプレイヤーはまず，テーブルの中心にコインを置く．その後，点対称を用いる．
37. 式 (2.2) (p. 44) の証明と同様．軸 $x$ と与えられた直線との交点の回りの回転を用いる．
38. 平面上に適当な複素構造を導入せよ．
39. 答え: 恒等変換．証明: 式 (2.7) (p. 49) を用いる．

40. 3 点 $A, B, C$ を表す複素数が与えられているとき，公式 2.12 から，3 点 $M$, $N$, $P$ を表す複素数を求めよ．
41. 容易にわかるように，$R_M^d \circ R_N^d \circ R_P^d \circ R_Q^d = \mathrm{id}$ である．この条件を複素数で書き直せばよい．
42. (a) $R_B \circ R_A = T_{2\overrightarrow{AB}}$. (b) $S_l \circ R_A$ は軸 $AK$ とベクトル $2\overrightarrow{AK}$ の映進である．ただし，$K$ は $A$ から直線 $l$ に下ろされた垂線の足である．
43. 五角形の連続する 5 辺の中点に関する点対称の合成を考える．このとき，この合成変換は五角形の 1 つの頂点に関する点対称であることを証明せよ．
44. 与えられた 3 つの対称変換の合成である映進の軸を求めよ．点 $A$ を通りこの軸に平行な直線を考えよ．
45. 練習 37 の結果を用いよ．
46. 3 つの円盤は戻ることができない．どんなショットも 3 つの円盤の集合の方向を変えるから．
47. 定義を用いよ．
48. (a) $R_A \circ S_l = S_l \circ R_A$. (b) $R_A \circ R_B = R_B \circ R_C$.
49. (a) 直線 $l$ は線分 $AB$ の垂直二等分線である．(b) 3 直線 $l, m, n$ は 1 点で交わる．
50. すべての点の集合は：$(5-6k+12l, 3+12k-6l)$, $(7-6k+12l, 2+12k-6l)$, $(3-6k+12l, 1+12k-6l)$, $(4-6k+12l, -1+12k-6l)$, $(2-6k+12l, 9+12k-6l)$, $(3-6k+12l, 10+12k-6l)$ である．$k, l$ は任意の整数．
51. (a) 成立する．(b) 成立する．(c) 成立しない．
52. 任意の元 $g \in G$ をとる．性質 2 より，$g^{-1} \in G$. 性質 1 より，$g \circ g^{-1} = \mathrm{id} \in G$.
53. 図 3.1b と 3 つの独立な点の像によって運動は完全に決定できることを利用せよ．
54. これらの群はどれも異なる群である．
55. 問題 21 の結果を用いよ．
56. (a) 存在する．たとえば，長方形．(b) 存在しない．$R_A, R_B$ をある図形の対称変換とする．このとき，$C = R_A(B)$ となる変換 $R_C$ はまた対称変換である．
57. 円周，とくに 1 点 あるいは同心円の和集合．
58. 平面運動の群における共役化の表は次の通りである．横列 $g$ と縦列 $f$ の交差点は，元 $f \circ g \circ f^{-1}$ とする．

| | $T_{\mathbf{b}}$ | $R_B^\beta$ | $S_m$ | $U_m^{\mathbf{b}}$ |
|---|---|---|---|---|
| $T_{\mathbf{a}}$ | $T_{\mathbf{a}}$ | $T_{R_B^\beta(\mathbf{a})}$ | $T_{S_m(\mathbf{a})}$ | $T_{S_m(\mathbf{a})}$ |
| $R_A^\alpha$ | $R^\alpha_{T_{\mathbf{b}}(A)}$ | $R^\alpha_{T_{\mathbf{b}}(A)}$ | $R^{-\alpha}_{S_M(A)}$ | $R^{-\alpha}_{U_m^{\mathbf{b}}(A)}$ |
| $S_l$ | $S_{T_{\mathbf{b}}(l)}$ | $S_{R_B^\beta(l)}$ | $S_{S_m(l)}$ | $S_{U_m^{\mathbf{b}}(l)}$ |
| $U_l^{\mathbf{a}}$ | $U^{\mathbf{a}}_{T_{\mathbf{b}}(l)}$ | $U^{R^\beta(\mathbf{a})}_{R_B^\beta(l)}$ | $U^{S_m(\mathbf{a})}_{S_m(l)}$ | $U^{S_m(\mathbf{a})}_{U_m^{\mathbf{b}}(l)}$ |

59. 群 $D_3$ の積表は，p.83 にある．

60. すべての元と可換な恒等変換．可換なすべての回転．群 $D_n$ ($n$ は奇数) にはこの他に可換な元の組はない．群 $D_n$ ($n$ は偶数) にはこの他に互いに垂直な直線に関する対称変換の組がある．
61. 等式 $(f^{-1})^k \circ f^k = \mathrm{id}$ を確かめよ．
62. $f^k$ の位数は $n/\operatorname{GCD}(n,k)$ と等しい．
63. (a)

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 1 | 2 | 2 | 4 | 2 | 6 | 4 | 6 | 4 | 10 | 4 | 12 | 6 | 8 |

(b) $\varphi(m) = m(1-1/p_1)\cdots(1-1/p_k)$，ただし，$p_1, \ldots, p_k$ はすべて $m$ と互いに素な数である．
64. ない．直線のなかにはこの運動によって自分自身にうつるものもある．
65. $n$ 個の回転 $R_A^\alpha$ の合成が恒等変換であるための必要十分条件は，回転角の総和 $n\alpha$ が $360°$ の倍数に等しいことである．
66. $A, B$ によって生成される群は，位数 5 の巡回群 $C_5$ である．$A$ 角が $\alpha = \pm 72°$ あるいは $\pm 144°$ の回転，$B$ は同じ中心の回りの角 $-2\alpha$ の回転である．
67. できない．どのような言葉も $EI^kA^lU^m$ と同義語になる．ただし，$k, l, m$ は 0 から 6 の整数である．
67. 適当な対称変換の組，あるいは適当な 1 つの対称変換と 1 つの回転との組をとることができる．たとえば，軸が隣どうしの 2 つの対称変換 $S_1$, $S_2$ は定義関係式 $S_1^2 = S_2^2 = (S_1 \circ S_2)^n = \mathrm{id}$ をみたす．
69. まず，どのような運動 $F_i$ も回転ではないことを証明せよ．
70. 仮定のもとで，次の 2 つのことがらを証明せよ: (1) 任意の与えられた元 $a$ に対して，$a^m = a^n$ となる整数 $m, n$ が存在する．(2) 次の簡約法則が成り立つ： $xy = xz$ ならば，$y = z$．
71. (1) 群をなさない: $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ は無理数だが，その和は有理数 0 である．(2) 群をなす．(3) 群をなす．(4) 群をなさない: 3/4 の逆数は 2 進数の有理数ではない．(5) たとえば，集合 $\{\tan n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$．
72. $x = ba^{-1}$．
73. この演算が結合法則をみたすことを確かめよ．
74. $G = \{x, 1/(1-x), (x-1)/x, 1-x, 1/x, x/(x-1)\}$．これらの関数の合成は次の表のとうりである．

| | $x$ | $\frac{1}{1-x}$ | $\frac{1-x}{x}$ | $1-x$ | $\frac{1}{x}$ | $\frac{x}{x-1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $x$ | $\frac{1}{1-x}$ | $\frac{1-x}{x}$ | $1-x$ | $\frac{1}{x}$ | $\frac{x}{x-1}$ |
| $\frac{1}{1-x}$ | $\frac{1}{1-x}$ | $\frac{1-x}{x}$ | $x$ | $\frac{1}{x}$ | $\frac{x}{x-1}$ | $1-x$ |
| $\frac{1-x}{x}$ | $\frac{1-x}{x}$ | $x$ | $\frac{1}{1-x}$ | $\frac{x}{x-1}$ | $1-x$ | $\frac{1}{x}$ |
| $1-x$ | $1-x$ | $\frac{x}{x-1}$ | $\frac{1}{x}$ | $x$ | $\frac{1-x}{x}$ | $\frac{1}{1-x}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\frac{1}{x}$ | $1-x$ | $\frac{x}{x-1}$ | $\frac{1}{1-x}$ | $x$ | $\frac{1-x}{x}$ |
| $\frac{x}{x-1}$ | $\frac{x}{x-1}$ | $\frac{1}{x}$ | $1-x$ | $\frac{1-x}{x}$ | $\frac{1}{1-x}$ | $x$ |

75. たとえば，練習 74 の式の 2 乗の和．

76. 同型である．

77. $S_a$, $S_b$, $S_c$ は任意に並べかえられる．同型写像の総数は，恒等写像も含めて 6 である．

78. 同型写像の定義を直接確かめよ．

79. 点 $E$ は恒等変換に対応する．一方，$A$, $B$, $C$, $D$, $K$ はそれぞれ $60°$, $120°$, $180°$, $240°$, $300°$ の回転に対応する．

80. その円周は恒等変換に対応する．一方，その三角形と正方形は群 $C_3$ の残りの 2 つの元に対応する．2 つの異なる同型写像が存在する．

81. その 2 つの積表を作れ．横列と縦列を入れ換えることによって，元の記号を同じものとして同じものにせよ．

82. 同型である．写像 $k \leftrightarrow 2k$ が同型写像．

83. 同型な群のただ 1 つの組は，$D_1$ と $C_2$ である．

84. $\varphi(g \circ g^{-1})$ を考え，$\varphi(g^{-1}) = h^{-1}$ を示せ．そうすれば $\varphi(g^{-n}) = \varphi((g^{-1})^n) = (h^{-1})^n = h^{-n}$ が導かれる．

85. (1) 正三角形の頂点に番号をつけよ．(2) 拡張された実数直線上にこの群を作用させよ．そしてこの作用のもとで集合 $\{0, 1, \infty\}$ の置換を行え．

86. ネイピアの対数を $N$ とすると，$N(x_1x_2) = N(x_1) + N(x_2) - B$ である．

87. (a) 群の公理を直接確かめよ．(b) 写像 $\varphi(x) = \tan x$ によるこの群の逆像は，ある開区間を含む実数からなる加群となる．それが $\mathbb{R}$ 全体に一致することを証明せよ．

88. (a) $x \star y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, (b) この演算は写像 $x \mapsto x - 1$ に沿っての積の引き戻しである．

89. 群 $D_3$ には 4 つの真の部分群がある:1 つは位数が 3 で残りの 3 つは位数が 2 である．

90. 存在する．$-1$ も生成元である．

91. $\mathbb{Z}$ の任意の部分群はその最小の正の元によって生成されることを証明せよ．

92. 群の公理を確かめよ．商群によって (§5.2) このことはもっと簡単に証明できる．

93. 群をなさない．たとえば，$\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{6} = \bar{0}$ だから．

94. 群をなす．これを証明するには積表を作成すればよい．

95. 方程式 $x^2 = 3y^2 + 8$ の任意の解はまた方程式 $x^2 \equiv 3y^2 + 8 \pmod 3$ の解である．後者の方程式は $x^2 \equiv 2 \pmod 3$ と同値であるが，解がない．

96. 81.

下 2 桁の数字は，100 を法とするその剰余と同じである．2003 は 100 と互いに素である．なぜなら，2 と 5 で割り切れないから．$\phi(100) = 100 \cdot (1 - 1/2) \cdot (1 - 1/5) = 40$, $2004 \bmod 40 = 4$ だから，フェルマーの小定理より，$2003^{2004} \equiv 2003^4 \equiv 3^4 = 81$ となる．

97. $\mathbb{Z}_m$ から $\mathbb{Z}_n$ への上への準同型写像が存在するための必要十分条件は，$m$ が $n$ で割り切れることである．この場合の上への準同型写像の例として，対応 $\bar{a} \mapsto \bar{a}$ がある．ただし，左側のバーは $m$ を法とする剰余類，右側のバーは $n$ を法とする剰余類である．
98. 置換後の複比の値は，次の式のうちのどれかになる: $x$, $1-x$, $1/x$, $1/(1-x)$, $1-1/x$, $x/(x-1)$．この結果と練習 74 の結果を比較せよ．
99. 平面運動の分類 (§2.7 の定理 4) を用いよ．
100. $\angle OAC = \angle BEF$ を証明せよ．この角を $\alpha$ とし，$BE$, $AC$ をそれぞれ $E$, $A$ の回りに $\alpha$ 回転すればよい．
101. 2 つの行列の積の行列式は，おのおのの行列の行列式の積に等しいことからどちらの主張も導かれる．
102. (a) 存在する．(b) 存在しない．
103. 核は奇関数全体の集合，像は偶関数全体の集合．
104. 準同型写像 $\varphi(z) = z^n$ を考えよ．
105. 準同型写像 $\varphi(x) = \cos x + i \sin x$ を考えよ．
106. これは二面体群 $D_n$ である．
107. $aba = bab$ なら，2 つの元 $x = ab$, $y = aba$ は等式 $x^2 = y^3$ をみたす．
$x^2 = y^3$ なら，2 つの元 $a = x^{-1}y$, $b = y^{-1}x^2$ は等式 $aba = bab$ をみたす．
108. 5 つの軌道に分かれる．
109. $\{-1, 2, 1/2\}$．
110. $\{1/2 + i\sqrt{3}/2, 1/2 - i\sqrt{3}/2\}$．
111. どちらの場合も作用は推移的である．どのような辺も 2 つの運動によって動かない，またどのような頂点も 3 つの運動によって動かない．
112. (a) $D$, $S$, $T$．(b) $D$．
113. (a) 2．(b) 1．(c) 7．
114. $\dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=1}^{p} n^{\mathrm{GCD}(k,p)}$．ここで, GCD は最大公約数．
115. 60．
116. 16．
117. 30．
118. (a) 23．(b) 218．
119. $(\binom{15}{6} + 15\binom{7}{3} + 2\binom{5}{2})/30 = 185$．
120. 黒いビーズは，白いビーズ全体を 4 つの部分に分ける．$m$ をその一番大きい部分における白ビーズの個数とし，$n, k$ を $n \geq k$ となる $m$ と隣りの部分の白いビーズの個数とする (あいまいな場合，任意のとりかたを使うことができる)．このとき，$(m, n, k)$ はネックレスの完全不変量となる．(この不変量はよくない．なぜなら，白いビーズが，2+2+2+0 のネックレスに対してはあいまいで，その値の集合が複雑に述べられるからである)．

121. (a) たとえば，よく知られている三角形の合同条件 (2 辺とそのなす角，1 辺とその両端の角，3 辺) は，それぞれ完全不変量である．
(b) たとえば，すべての辺 $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ の長さと，角 $\angle ABC$ からなる順序づけられた集合は不変量である．この不変量は凸の四辺形全体の上で完全である．
122. 有限回転群 (p.71) を参照せよ．
123. 円周上の無限個の点集合は離散的ではないことに注意せよ．
124. 回転の中心を角の頂点とし，$C_n$ に対しては $360°/n$ の角，$D_n$ に対しては $180°/n$ の角．
125. 条件 $|kn - lm| = 1$ はその平行四辺形の面積が 1 であることを意味する．したがって，よく知られている Pick の公式によって，$P$ が $A$ を 1 つの頂点とするそのような平行四辺形であるなら，$P$ に族する $A$ の軌道の点は，$P$ の頂点のみである．
126. 共役化の表 (p.216) を用いよ．
127. $O$ を平面上の任意の点，$S$ を与えられた群の作用による $A$ の軌道とする．また，$A$ を $S$ の任意の点で，線分 $OA$ が $S$ の他の点を含まない点とし，$B$ を直線 $OA$ から最小距離となる $S$ の点とする．組 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ は，生成元系であることを証明せよ．
128. 生成元が $a$, $b$, $c$, 関係式が $a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^3 = (bc)^3 = (ca)^3 = (abc)^2 = e$ の位数 18 の群．
129. $p4m$, $p4g$, $p2$.
130.

| | |
|---|---|
| $C_1$ | $p1$ |
| $D_1$ | $pm$, $pg$, $cm$ |
| $C_2$ | $p2$ |
| $D_2$ | $pmm$, $pmg$, $pgg$, $cmm$ |
| $C_3$ | $p3$ |
| $D_3$ | $p31m$, $p3m1$ |
| $C_4$ | $p4$ |
| $D_4$ | $p4m$, $p4g$ |
| $C_6$ | $p6$ |
| $D_6$ | $p6m$ |

131. 容易に想像できるように，数字は回転の最大位数，記号 $m$ (*mirror*) は対称変換 (鏡映ともいう)，$g$ は映進を表す．$p$ と $c$ はほんの少し意味あいが違う．結晶学者の意味するところは，$p$ は基本の (*primitive*) 組織，$c$ は中心の (*centred*) 組織である．数学的にはただ単に，文字 $c$ を用いた群は，ひし形の組織をもつことがあることを意味するにすぎないように思われる (p.148 参照)．非専門家にとってみれば，類似した記号を，長方形や六角形に使わないのはどうしてかと疑問である．最後に，$m$ の位数と，記号 $p3m1$ や $p31m$ のなかの 1 につい

ては，まったく謎である．

132. Aff$(2,\mathbb{R})$ から GL$(2,\mathbb{R})$ への全射準同型写像を定義し，準同型第一定理 (p.124) を用いよ．
133. 与えられた台形を，等しい長さの辺をもつ台形にうつす変換が存在する．
134. どちらの群も位数 6 で，二面体群 $D_3$ に同型である．
135. $p \neq 0$ ならば，点 $m/p$.
136. その合成と逆変換に対する明確な式を完全に書け．
137. 直接計算して，$x'_i = (mx_i + n)/(px_i + q)$ のとき，

$$\frac{x'_3 - x'_1}{x'_3 - x'_2} : \frac{x'_4 - x'_1}{x'_4 - x'_2} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2},$$

となることを確かめよ．

138. 練習 74 と同様に，この群の元の完全なリストは，2 つの与えられた関数の合成を，元が繰り返されるまでほどこすことで直接得られる．
同型を証明するため，$D_n$ の定義関係式をみたすような 2 つの元をみつけよ (p.83 の (3.1) 式参照).
139. 変換 $x \mapsto (mx + n)/(px + q)$ が有限位数をもつための必要十分条件は，

$$\frac{m^2 + q^2 + 2np}{2(mq - np)} = \cos\alpha$$

が成り立つことである．ただし，$\alpha$ は，有理数の角度である．

140. 正規部分群ではない．6.6 式を用いて，$ptp^{-1}$ がアフィン変換とならないような移動 $t$ と射影変換 $p$ をみつけよ．
141. 射影変換によって，四角形 $ACFD$ が正方形に変わるかもしれない．この場合，この正方形のデカルト座標系を導入することができる．そうすれば，直接の計算で解ける．注意． もちろん，これは美しい解答ではない．腕力で問題を解くのに必要とされる計算量を，どのようにして減らすかを示しただけだからである．事実，変換する前の設定では，2 つの方程式によって関係づけられる 12 個の実数によって，6 個の基定点が表されていた．その射影変換ののち，その基底点は，2 つだけの独立なパラメータによって配置される．
142. GL$(2,\mathbb{R})$ から PGL$(1,\mathbb{R})$ への全射準同型写像を定義し，準同型第一定理を用いよ (p. 124).
143. 与えられた三角形に外接し，与えられた 3 つの直線に平行な辺をもつ三角形を作図するほうが簡単である．
144. 外側の円周上の点を中心とし，係数が 3/4 の相似拡大変換 を用いよ．
145. 重心を中心とし，係数が $-2$ の相似拡大変換を用いよ．
146. 垂心を中心とし，係数が 1/2 の相似拡大変換を考えよ．与えられた三角形の外接円は，この変換によって求める円にうつされることを証明せよ．
147. 承知のように係数が 1 ではない任意の相似変換には，ただ 1 つの不動点がある．この問題はこの不動点が小さい縮尺の地図に存在することを証明すればよい．それが地図の外側にあると仮定して，小さい縮尺の地図と交わるようにそ

の点を通る直線を描け．そして，その直線と地図の境界との交わる点を考えよ．

148. $E$ は，$A$ を $B$, $C$ を $D$ にうつす相似拡大変換の中心である．

149. 線分 $MC$, $PN$ をそれぞれ螺旋相似変換 $F_A(\sqrt{2}, 45°)$, $F_C(\sqrt{2}, 45°)$ の作用での像を求めよ．

150. $O$ を中心とする反転以外に，この群は，1 点を中心とする正の相似拡大変換全体を元として含み，積を演算とする 0 でない実数の群 $\mathbb{R}^*$ に同型である．

151, 152. 反転の中心を通らない直線はその反転の中心を通る円周にうつる．逆も成り立つ．

153. このことは，第 7 章の定理 18 で証明した (p.198 参照)．

154. ある軌道の長さは，2, 3, 6 あるいは 12 でありうる．図 6.5 と下記の議論を参照せよ．

155, 156. 合成と逆変換に対する公式を導け．

157. $(-3, 0)$.

159. (a) 存在する．たとえば $y' = 0$. (b) 存在しない．

160. $y = 2x + C$, $y = \sin x + C$, $y = -1/x$.

161. おおまかにいって，(7.3) に対しては，直線の族，(7.5) に対しては，双曲線の族．

162. 原点を中心とする円周．対応する微分方程式は $y' = -x/y$ である．この方程式は直線 $y = 0$ 以外のいたるところで定義される．平面全体で定義されるこのような微分方程式は存在しない．

163. $y = 1/(C - x)$.

164. $v = x + y$, $u = x$.

165. $y = -x^4/3 + x^2 + Cx$.

166. $y = e^{x^2/4}\left(\int e^{x^2/2}dx + C\right)^{1/2}$.

167. $y = \tan ax + C$.

168. $y = \dfrac{1}{x^2 \tan(1/x + C)} - \dfrac{1}{x}$.

169. $-(n+3)/(n+4) = -4$ となる $n$ を求めよ．

170. $\dfrac{1}{q^k(n) + 2} = \dfrac{1}{n+2} - k$ から，$\dfrac{1}{q(n) + 2} = \dfrac{1}{n+2} - 1$ に注意せよ，

171. 問題 66 を参照せよ．

172. (a) $\dfrac{dr}{d\phi} = \dfrac{(yy' + x)\sqrt{x^2 + y^2}}{xy' - y}$.

(b) $\sqrt{x^2 + y^2}(C - 2\arctan(y/x))^2 = 1$.

173. $g_t \circ g_s = g_{t+s} = g_{s+t} = g_s \circ g_t$.

174. 1 パラメータ群である．中心が 0 であると仮定すると，パラメータ表示は，$g_t(x, y) = (e^t x, e^t y)$.

175. $x_t = x\cos t - y\sin t$, $y_t = x\sin t + y\cos t$.

176. これらの公式は螺旋相似変換からなる群を定義する．その軌道は対数のうず巻き線である．

177. 軌道は，直線 $x + y =$ 定数．群の性質は，ヴィエートの定理から導かれる．

178. $y = f(y/x)$．ただし，$f$ は任意の関数．

179. $y = \dfrac{xf(\xi) + y}{x - yf(\xi)}$．ただし，$\xi = \arctan \dfrac{y}{x} - \dfrac{b}{a} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

180. 関数 $x^2 + y^2$ はこの群の作用の完全な不変量である．

181. 練習 179 の答えより，$\xi$.

182. $y = Cx^2 - x$.

183. ならない．

184. 2 直線 $ax + by + c = 0$, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ の交点を中心とする相似変換からなる群を用いよ．

185. 群 $x_1 = e^{2t}x$, $y_1 = e^t y$ を用いよ．答え: $y = \sqrt{Cx^2 - 2x}$.

186. $y = \dfrac{x + C - 1}{x + C} e^x$.

# 付録B
# ブックガイド

本書に興味をもった読者が，さらに勉強を進めたいときのために，日本語で読める参考図書をいくつかあげておく．

- 浅野啓三・永尾汎『群論』(岩波全書，岩波書店，1965 年)
- 河野俊丈『組みひもの数理』(アウト・オブ・コース，遊星社，1993 年)
- A. コーエン『コーエンの微分方程式：リー群論の応用』(高野一夫訳，森北出版, 1971 年)
- 小林俊行・大島利雄『Lie 群と Lie 環』全 2 巻 (岩波講座現代数学の基礎，岩波書店，1999 年)
- 寺田至・原田耕一郎『群論』(岩波講座現代数学の基礎，岩波書店，1998 年)
- 難波誠『群と幾何学』(現代数学社, 1997 年)
- V.V. ニクリン・I.R. シャファレヴィッチ『幾何学と群』(根上生也訳，シュプリンガー・フェアラーク東京，1993 年)
- L.S. ポントリャーギン『連続群論』(柴岡泰光・杉浦光夫・宮崎功訳，岩波書店，1974 年)
- 村杉邦男『結び目理論とその応用』(日本評論社，1993 年)
- 雪田修一『代数学のレッスン』(サイエンティスト社，1989 年)
- 横田一郎『群と位相』(基礎数学選書，裳華房, 1971 年)

# 索　　引

# 訳者あとがき

1996 年に早稲田大学で開催された研究集会 “Knots 96” で初めてお会いして以来, ドゥージン先生とは, 数学や音楽, ヨーロッパのお国柄や日本の伝統的文化についてなどを E メールでやりとりしています. ドゥージン先生は国際的な知識が豊富な上, 趣味も多彩. なかでも, 先生が弾かれるアコーディオンはプロなみの響きがあります.

さて翻訳にあたっては, 英語の文章にとらわれないよう, つまり直訳にならないよう注意し, できるだけシンプルに, わかりやすく訳をつけようと努力しました. また, 重複して書いているところをカットするよう心がけました. 数学用語は, 数学辞典 (岩波書店) を参考にし, 記号もいくつか数学辞典に習って, ドゥージン先生了解のもとで変更しました.

本書の魅力の 1 つは, やはり具体例や練習問題, 図が豊富にあることで, 個々の問題を理解するのにそんなに時間がかからないこと —— 専門的な知識をいつのまにか得ることができることだと思います. 序章にもありますように, 練習問題を 1 つ 1 つ解きながら理解していただきたいと思いますし, 絵を見ながら, 描きながら, 楽しんで本書を読み進めていただきたいと思います.

最後になりましたが, 監修をして下さった雪田修一先生, 出版するにあたりいろいろとお世話になりましたシュプリンガー・フェアラーク東京の方々, どうもありがとうございました.

2000 年 11 月 6 日

横浜国立大学　名倉真紀

著　者
セルゲイ・ドゥージン（**Sergei Duzhin**）
Professor, Department of Mathematics, Independent University of Moscow, Russia and Head of the Laboratory of Problems of Small Dimension, Program Systems Institute, Pereslavl-Zalessky, Russia
1993〜94年(1年)，1995〜96年(1年)，1999〜2000年（半年）会津大学客員研究員として，1999年（半年）東京大学大学院数理科学研究科客員教授として滞日

ボリス・チェボタレフスキー（**Boris Chebotarevsky**）
Associate Professor, Mogilev Pedagogical University, Mogilev, Belarus

日本語版監修
**雪田　修一**（ゆきた　しゅういち）
法政大学情報科学部ディジタルメディア学科助教授
博士（情報科学）
東京大学理学部物理学科卒業後，同大学大学院理学系研究科博士課程（数学専攻）単位取得．稚内北星学園短期大学，会津大学を経て，2000年4月より現職
専門：群上のセル構造オートマトン，抽象的数学概念の可視化技術

訳　者
**名倉　真紀**（なぐら　まき）
横浜国立大学工学部生産工学科応用数学助手
横浜国立大学工学部生産工学科応用数学文部技官を経て，1997年10月より現職
専門：位相幾何学

変換群入門　　定価（本体**2,700**円+税）

---

発　行　2000年12月17日
著　者　S. ドゥージン/B. チェボタレフスキー
日本語版監修　雪田　修一
訳　者　名倉　真紀
発行者　平野　皓正
発行所　シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社
〒113-0033　東京都文京区本郷3丁目3番13号
TEL（03）3812-0757（営業直通）
印刷所　平河工業社


---

ISBN 4-431-70907-X　C3041